



**UNIVERSITÀ DI PARMA**

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA**

**DOTTORATO DI RICERCA IN  
INGEGNERIA CIVILE E ARCHITETTURA**

**CICLO XXXI**

***ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI  
COMPONENTI STRUTTURALI METALLICI  
SOGGETTI A FATICA DA CONTATTO***

*Coordinatore:*  
Chiar.mo Prof. Andrea Carpinteri

*Relatore:*  
Prof.ssa Sabrina Vantadori

*Tutor:*  
Chiar.mo Prof. Andrea Carpinteri

*Dottorando:*  
Ing. Giovanni Fortese

---

Anni 2015/2018



## SOMMARIO

---

La presente Tesi di Dottorato ha come oggetto l'estensione del criterio di fatica multiassiale, proposto da Carpinteri e collaboratori, all'analisi del comportamento a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a contatto (*fretting fatigue*), in regime di alto numero di cicli. In particolare, tale estensione consiste nell'applicazione congiunta del criterio di Carpinteri et al. con approcci non-locali. L'obiettivo finale è quello di sviluppare nuovi criteri per la valutazione della vita a fatica e del piano di nucleazione delle fessure in componenti strutturali metallici in presenza di fatica da contatto.

Nel *Capitolo 1* viene introdotto il fenomeno della fatica nei componenti strutturali metallici soggetti a contatto, e delle relative problematiche ad esso associate. Inoltre, viene presentato il panorama storico al fine di definire l'evoluzione degli approcci impiegati nell'analisi del fenomeno.

Il *Capitolo 2* è dedicato all'analisi dello stato tensionale indotto all'interno di due corpi posti a contatto e soggetti a carichi tangenziali, di natura statica o ciclica, con particolare riferimento a contatti cilindrici e a contatti sferici. Vengono quindi fornite le espressioni analitiche, in forma approssimata e in forma chiusa, necessarie per la determinazione delle componenti del tensore degli sforzi in un punto generico del materiale. Tali componenti rappresentano i dati di ingresso per l'analisi a fatica.

Nel *Capitolo 3* viene presentata la procedura tipicamente impiegata per l'analisi del comportamento a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a fatica da contatto. Tale procedura, in particolare, consiste nell'applicazione

congiunta di criteri di fatica multiassiale con approcci non-locali, con il fine di tenere in considerazione la presenza degli elevati gradienti tensionali, tipici della fatica da contatto. Per tale motivo viene inizialmente illustrato il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri e collaboratori, originariamente proposto per la valutazione della vita a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a carichi ciclici multiassiali (fatica pura). Successivamente, viene presentato lo stato dell'arte dei più comuni approcci non-locali basati sul concetto di distanza critica, al fine di individuare un punto rappresentativo del materiale in cui eseguire l'analisi a fatica del componente.

Il *Capitolo 4* è dedicato alla valutazione della vita a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a fatica da contatto. Più precisamente, il criterio di Carpinteri e collaboratori viene esteso considerando quattro diverse tipologie di approccio non-locale, basate sul concetto di distanza critica:

- (i) approccio non-locale 1, in cui viene assunta una distanza critica costante;
- (ii) approccio non-locale 2, in cui viene proposta una nuova formulazione della distanza critica, funzione del gradiente tensionale;
- (iii) approccio non-locale 3, in cui viene proposta una nuova formulazione del *Line Method* (appartenente alla Teoria della Distanza Critica);
- (iv) approccio non-locale 4, in cui viene proposta una nuova formulazione dell'*Area Method* (appartenente alla Teoria della Distanza Critica).

Al fine di verificare la validità dell'estensione considerata, vengono impiegati dati sperimentali reperiti in letteratura, relativi a contatti cilindrici e sferici.

Infine, il *Capitolo 5* è dedicato alla determinazione del piano di nucleazione della fessura in componenti strutturali metallici soggetti a fatica da contatto. Tale determinazione viene condotta estendendo il criterio di Carpinteri e collaboratori, attraverso tre distinte procedure:

- (i) procedura 1, nella quale il piano di nucleazione della fessura viene valutato come media della giacitura dei piani critici determinati lungo un dato percorso curvo;
- (ii) procedura 2, nella quale il piano di nucleazione della fessura viene assunto coincidente con il piano critico al centro di una regione di materiale, detta volume strutturale;

(iii) procedura 3, nella quale il piano di nucleazione della fessura viene determinato impiegando il *Critical Direction Method* congiuntamente al criterio di Carpinteri et al.

L'accuratezza di tali metodi viene valutata impiegando dati sperimentali, reperiti in letteratura, relativi a prove di fatica condotte in presenza di contatti cilindrici.



## ABSTRACT

---

*The present Ph.D. Thesis deals with the extension of the multiaxial fatigue criterion proposed by Carpinteri and co-workers, in order to analyse the fatigue behaviour of metallic structural components subjected to fretting fatigue in high-cycle fatigue regime. In particular, such an extension consists in the joint application of the Carpinteri et al. criterion together with non-local approaches. The final objective is to develop new criteria for both fatigue life and crack nucleation plane evaluation in metallic structural components under fretting fatigue.*

*Fatigue phenomenon in metallic structural components subjected to contact together with related problems are introduced in Chapter 1. Furthermore, the historical background is presented in order to define the evolution of approaches employed in the analysis of such a phenomenon.*

*Chapter 2 deals with the stress state analysis induced inside two bodies pressed in contact and subjected to tangential loadings (static or cyclic), with particular reference to both cylindrical and spherical contacts. The analytical expressions are given in both approximate and closed form, in order to determine stress tensor components in a generic point of the material. Such components represent the input data for fatigue analysis.*

*The procedure typically employed for fatigue behaviour analysis of metallic structural components subjected to fretting is presented in Chapter 3. In particular, such a procedure consists in the joint application of multiaxial fatigue criteria together with non-local approaches, in order to take into account the influence of high stress gradients which are typical of fretting fatigue. In such a*

context, the multiaxial fatigue criterion by Carpinteri and co-workers, originally proposed for fatigue life evaluation of metallic structural components subjected to multiaxial cyclic loadings (pure fatigue), is outlined. Then, the state-of-the-art of the most common non-local approaches based on the critical distance concept is presented, aimed to determine a representative material point where to perform the fatigue analysis of the structural component being examined.

Chapter 4 deals with fatigue life evaluation of fretted metallic structural components. More precisely, the criterion by Carpinteri and co-workers is extended by considering four different non-local approaches, based on the critical distance concept:

- (i) non-local approach No.1, where a constant critical distance is assumed;
- (ii) non-local approach No.2, where a new expression of the critical distance is proposed, as a function of the stress gradient;
- (iii) non-local approach No.3, where a new formulation of the Line Method (belonging to the Critical Distance Theory) is proposed;
- (iv) non-local approach No.4, in which a new formulation of the Area Method (belonging to the Critical Distance Theory) is proposed.

In order to verify the validity of the extension here examined, some experimental results from the literature, related to both cylindrical and spherical contacts, are employed.

Finally, Chapter 5 deals with crack nucleation plane determination in metallic structural components under fretting fatigue. Such a determination is performed by extending the criterion by Carpinteri and co-workers through three different procedures:

- (i) procedure No.1, where the crack nucleation plane is evaluated as the average orientation of critical planes determined along a given curved path;
- (ii) procedure No.2, where the crack nucleation plane is assumed to be coincident with the critical plane at the centre of a material region, named structural volume;
- (iii) procedure No.3, where the crack nucleation plane is determined by employing the Critical Direction Method together with the criterion by Carpinteri et al.

The accuracy of such methods is evaluated by means of experimental data, available in the literature, related to fatigue tests carried out under cylindrical contacts.



<b>SOMMARIO</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>1. OGGETTO E OBIETTIVI DELLA TESI DI DOTTORATO</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione	2
1.2 Panorama storico	4
1.3 Conclusioni	8
1.4 Bibliografia	9
<b>2. ANALISI DELLE TENSIONI E DEGLI SPOSTAMENTI IN PRESENZA DI CONTATTO</b>	<b>13</b>
2.1 Introduzione	14
2.2 Teoria di Hertz	15
2.2.1 Contatto cilindrico	20
2.2.2 Contatto sferico	23
2.3 Carico tangenziale alla superficie di contatto in regime statico: parziale scorrimento (contatto incipiente)	28
2.3.1 Contatto cilindrico	33
2.3.2 Contatto sferico	41
2.4 Carico tangenziale alla superficie di contatto in regime ciclico: parziale scorrimento	49

---

2.4.1 Contatto cilindrico	50
2.4.2 Contatto sferico	58
2.5 Conclusioni	65
2.6 Bibliografia	66
<b>3. ANALISI DEL COMPORTAMENTO A FATICA DA CONTATTO DI MATERIALI METALLICI</b>	<b>69</b>
3.1 Introduzione	70
3.2 Procedura per l'impiego congiunto di criteri di fatica e approcci non- locali	72
3.2.1 Criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri et al.	75
3.2.2 Approcci non-locali: stato dell'arte	84
3.2.2.1 <i>Teoria della distanza critica</i>	84
3.2.2.2 <i>Distanza critica funzione del numero di cicli</i>	89
3.2.2.3 <i>Distanza critica funzione del gradiente tensionale</i>	91
3.2.2.4 <i>Distanza critica funzione delle tensioni elasto-plastiche</i>	94
3.3 Conclusioni	96
3.4 Bibliografia	98
<b>4. DETERMINAZIONE DELLA VITA A FATICA DI COMPONENTI METALLICI IN PRESENZA DI CONTATTO</b>	<b>107</b>
4.1 Introduzione	108
4.2 Determinazione della vita a fatica in presenza di contatto cilindrico	109
4.2.1 Descrizione dei risultati sperimentali impiegati	109
4.2.2 Applicazione del criterio di Carpinteri et al. combinato con approcci non-locali: contatto cilindrico	116
4.2.2.1 <i>Approccio non-locale 1</i>	116
4.2.2.2 <i>Approccio non-locale 2</i>	120
4.2.2.3 <i>Approccio non-locale 3</i>	125
4.2.2.4 <i>Approccio non-locale 4</i>	129
4.3 Determinazione della vita a fatica in presenza di contatto sferico	133
4.3.1 Descrizione dei risultati sperimentali impiegati	133
4.3.2 Applicazione del criterio di Carpinteri et al. combinato con approcci non-locali: contatto sferico	137
4.3.2.1 <i>Approccio non-locale 1</i>	138

---

4.3.2.2 <i>Approccio non-locale 2</i>	139
4.3.2.3 <i>Approccio non-locale 3</i>	141
4.3.2.4 <i>Approccio non-locale 4</i>	143
4.4 Conclusioni	147
4.5 Bibliografia	149
<b>5. DETERMINAZIONE DEL PIANO DI NUCLEAZIONE DELLA FESSURA PER COMPONENTI METALLICI IN PRESENZA DI CONTATTO</b>	<b>153</b>
5.1 Introduzione	154
5.2 Determinazione del piano di nucleazione della fessura	156
5.2.1 Risultati sperimentali analizzati	156
5.2.2 Descrizione delle procedure impiegate per la determinazione del piano di nucleazione della fessura	161
5.2.2.1 <i>Procedura 1</i>	162
5.2.2.2 <i>Procedura 2</i>	168
5.2.2.3 <i>Procedura 3: Critical Direction Method</i>	171
5.3 Conclusioni	178
5.4 Bibliografia	181
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>185</b>
<b>LISTA DELLE PUBBLICAZIONI</b>	<b>191</b>
Note su Riviste Internazionali	191
Note a Congressi	194



**OGGETTO E OBIETTIVI DELLA TESI DI  
DOTTORATO**

---

**OBJECT AND OBJECTIVES OF THE PH.D. THESIS**

*Fretting is defined as a phenomenon that occurs in correspondence of contact surfaces of two structural components pressed against each other and subjected to small oscillatory relative displacements. When one or both structural components are also subjected to cyclic loadings, such a case is called fretting fatigue (Hills, 1994). Such a phenomenon is commonly observed at mechanical joints of machinery and structural components subjected to vibrations.*

*Depending on the relative displacement amplitude, two main regimes can be distinguished (Proudhon, 2006):*

*(i) total sliding regime, where the displacement amplitude is between 20  $\mu\text{m}$  and 300  $\mu\text{m}$ . In such a regime, wear of the components pressed in contact is observed, with loss of material;*

*(ii) partial sliding regime, where the displacement amplitude is between 3  $\mu\text{m}$  and 20  $\mu\text{m}$ . Such a regime produces, near to the contact surface, high stress gradients, greater than those observable in the vicinity of a classical notch (Nesládek, 2012).*

*Under total sliding regime, the main damage consists in wear of the material and in debris formation. Such a phenomenon is commonly known as wear (Lemm, 2015). Under partial sliding regime, the high stress concentrations together with the cyclic nature of fatigue loadings lead to the accumulation of micro-flaws at a microscopic material level, that could evolve in cracks (Araújo, 2003).*

*Fretting fatigue has long been recognised as a separate branch of fatigue phenomenon, in which the material wear has been considered to have a main role in failure of components pressed in contact (Buciumeanu, 2009). Nevertheless,*

*debris formation of material, unless particular long-term issues, results to be less damaging with respect to crack nucleation and next propagation in components (Waterhouse, 1992). An example of a tragic consequence related to fretting fatigue failure of mechanical components is the crash of Chinook helicopter in 1986, where 45 people died.*

*Some mechanical-structural applications where fretting fatigue occurs are:*

- rail transport, where rolling fatigue issues may produce nucleation of cracks which, propagating, could lead to failure and consequent derailment;*
- both air and sea transport, in particular in riveted joints, where damages related to detachment of layers and components could be registered;*
- automotive area, where failure can occur in wheel spindle, turbine blades hook systems with the hub, fasten of crankshaft with bearing;*
- orthopaedic implants, where artificial prostheses are subjected to both contact and rubbing with other parts;*
- metal ropes and cables, where the mechanical contact with the winch may lead to ravel and shredding;*
- generic applications where there are bolted joints subjected to small oscillatory relative displacements or vibrations.*

*In such a context, an accurate analysis of fatigue behaviour of structural components subjected to fretting fatigue appears of fundamental importance, especially in terms of damage related to material failures, damage concerning human safety and economic aspects.*

*In particular, the objective of the present Ph.D. Thesis is to develop new criteria, by extending one already widely validated under pure fatigue, in order to estimate the fatigue life and crack nucleation plane under fretting. This would allow us a more detailed design of structural elements, while today design is governed by standards that implement too much conservative criteria.*

## **1.1 Introduzione**

Il *fretting* è definito come quel fenomeno che avviene in corrispondenza della superficie di contatto tra due componenti compressi l'uno contro l'altro e soggetti a piccoli scorrimenti relativi. Quando uno o entrambi i componenti sono soggetti anche a carichi ciclici di fatica, si parla di *fretting fatigue* o fatica da contatto

(Hills, 1994). Tale fenomeno è comunemente osservabile in corrispondenza di unioni meccaniche di macchinari e componenti strutturali soggetti a vibrazioni.

In funzione dell'ampiezza degli scorrimenti relativi, possono essere distinti due regimi (Proudhon, 2006):

(i) regime di slittamento totale, dove l'ampiezza degli scorrimenti è compresa tra 20  $\mu\text{m}$  e 300  $\mu\text{m}$ . In presenza di tale regime si osserva un'usura dei componenti posti a contatto, con perdita del materiale;

(ii) regime di scorrimento parziale, dove l'ampiezza degli scorrimenti è compresa tra 3  $\mu\text{m}$  e 20  $\mu\text{m}$ . Tale regime produce, in prossimità della superficie di contatto, elevati gradienti tensionali, superiori a quelli osservabili in corrispondenza di un classico intaglio (Nesládek, 2012).

In regime di slittamento totale, il danno principale consiste nell'usura del materiale e nella formazione di detriti. Tale fenomeno è comunemente noto con il nome di *wear* (Lemm, 2015). In regime di scorrimento parziale, l'elevata concentrazione tensionale insieme alla natura ciclica dei carichi di fatica portano alla formazione di micro-scorrimenti a livello microscopico del materiale che possono evolversi in fessure (Araújo, 2003).

La fatica da contatto è stata a lungo considerata come una disciplina non rientrante nell'ambito della fatica, in cui l'usura del materiale era ritenuta avere un ruolo principale nella crisi dei componenti posti in contatto (Buciumeanu, 2009). Tuttavia, la formazione di detriti di materiale, a meno di particolari problematiche a lungo termine, risulta essere meno gravosa della nucleazione e successiva propagazione di fessure nel componente (Waterhouse, 1992). Un esempio di catastrofico avvenuto in seguito alla rottura di componenti meccanici, imputabile alla fatica da contatto, è la caduta dell'elicottero Chinook nel 1986, in cui persero la vita 45 persone.

Alcune applicazioni meccanico-strutturali in cui il fenomeno della fatica da contatto trova riscontro sono:

- trasporti ferroviari, in cui le problematiche legate ad affaticamento per contatto volvente sui binari possono portare alla formazione di fessure che, propagando, possono portare alla rottura con conseguente possibile deragliamenti;

- trasporto aereo e marittimo, con particolare riferimento alle unioni rivettate, in cui possono registrarsi danni legati al distaccamento di lamine e componenti strutturali;
- settore dell'autotrazione, in cui possono verificarsi rotture in corrispondenza dei mandrini delle ruote, nei sistemi di aggancio delle pale delle turbine con il mozzo, nei serraggi albero-motore/cuscinetti;
- impianti ortopedici, in cui protesi artificiali sono soggette a contatto e sfregamento con altri elementi;
- cavi metallici e funi, in cui il contatto con l'argano può portare al loro sfilacciamento/sfibramento;
- applicazioni generiche in cui si hanno unioni bullonate soggette a piccoli scorrimenti relativi o a vibrazioni.

In tale contesto, un'analisi accurata del comportamento a fatica di componenti strutturali soggetti a fatica contatto appare di fondamentale importanza, soprattutto in relazione ai danni connessi alla crisi del materiale, ai danni relativi alla sicurezza della vita umana e ad aspetti economici.

In particolare, l'obiettivo della presente Tesi di Dottorato è quello di sviluppare nuovi criteri, estendendone uno già ampiamente validato nell'ambito della fatica pura, che permetta la valutazione della vita a fatica e la valutazione della giacitura del piano di nucleazione delle fessure in presenza di fatica da contatto. Ciò consentirebbe una progettazione degli elementi strutturali più di dettaglio, mentre ad oggi la progettazione è disciplinata da Normative che recepiscono criteri troppo a favore di sicurezza.

## **1.2 Panorama storico**

Lo studio della fatica trova le sue origini nelle analisi condotte da Wöhler, intorno al 1850, rivolte alle rotture apparentemente inspiegabili degli assili dei vagoni ferroviari, come quella avvenuta a Versailles nel 1842. In particolare, Wöhler eseguì un'estesa campagna di prove sperimentali su provini in acciaio, soggetti a carichi ciclici monoassiali ad ampiezza costante, e le sue ricerche si protrassero per quasi vent'anni.

Tuttavia, la prima documentazione sul fenomeno della fatica da contatto nella letteratura scientifica risale a quasi sessant'anni dopo, nel 1911. In particolare,



Eden e collaboratori (Eden, 1911) analizzarono la presenza di ossido di ferro sulla superficie di provini soggetti a prove di fatica, in corrispondenza dell'ancoraggio con le ganasce della macchina di prova.

Nel 1927, Tomlinson (Tomlinson, 1927) condusse i primi studi sistematici sul fenomeno, attraverso la realizzazione di macchinari di prova in grado di riprodurre piccoli scorrimenti oscillatori su due componenti posti a contatto. Tomlinson intuì che la fatica da contatto fosse un fenomeno associato al movimento tangenziale tra due componenti, ma solamente nel 1939, proseguendo i suoi studi insieme a Thorpe e Gough (Tomlinson, 1939), arrivò a conclusioni più rilevanti. Infatti, dimostrò come la fatica da contatto fosse un processo meccanico dovuto ai micro-scorrimenti, dell'ordine di qualche micron, tra le superfici di interfaccia di due componenti posti a contatto. Tuttavia, Tomlinson e collaboratori non riuscirono a spiegare l'eccessiva riduzione di resistenza rispetto alla fatica classica.

L'effetto dello scorrimento oscillatorio tra due superfici sulle proprietà a fatica del materiale, venne investigato per la prima volta, nel 1941, da Warlow-Davies (Warlow-Davies, 1941), il quale eseguì alcuni test sperimentali a fatica su provini posti a contatto. Warlow-Davies osservò, considerando diverse configurazioni geometriche, una riduzione della resistenza a fatica del materiale pari a circa il 20%. Tali risultati furono, successivamente, confermati dagli studi condotti da McDowell (McDowell, 1953), il quale osservò che l'effetto congiunto della fatica e degli scorrimenti oscillatori tra due corpi posti a contatto portava addirittura ad una riduzione della resistenza del materiale di un fattore da 2 a 5.

Fenner e collaboratori (Fenner, 1956) riuscirono a identificare diverse rotture dovute alla fatica da contatto evidenziando, per ognuna di esse, la riduzione della vita rispetto alla configurazione in presenza di fatica pura. Inoltre, intuirono come la concentrazione tensionale, dovuta alla geometria dei componenti, avesse un ruolo fondamentale.

Successivamente, nel 1960, Fenner e Field (Fenner, 1960) eseguirono una campagna di prove sperimentali impiegando un apparato di prova "a ponte", ossia caratterizzato da due pads piatti posti a contatto con il provino da testare. Tale tipologia di prova fu inizialmente impiegata da diversi studiosi (Doeser, 1981; Edwards, 1981).

Tuttavia, Milestone (Milestone, 1970) propose l'utilizzo di pads cilindrici per l'esecuzione di test a fatica da contatto, presentando tale geometria il vantaggio di poter determinare, analiticamente e in forma chiusa, la distribuzione del campo tensionale. Milestone ottenne come principale conclusione degli studi condotti che la riduzione della vita nella fatica da contatto era associata all'elevata concentrazione tensionale in prossimità della superficie di contatto, confermando le intuizioni di Fenner e collaboratori.

Un'esauritiva campagna di prove sperimentali in presenza di contatto cilindrico fu eseguita, tra gli anni '60 e '70, da Nishioka e Hirakawa. In particolare, gli Autori osservarono come l'ampiezza degli scorrimenti relativi tra i corpi posti a contatto avesse un'influenza rilevante sulla vita a fatica (Nishioka, 1969a). Inoltre, notarono come il punto di nucleazione della fessura fosse localizzato in una regione prossima all'estremità della superficie di contatto, mentre la giacitura del piano di nucleazione della fessura fosse inclinata e procedesse verso l'interno di tale superficie (Nishioka, 1969b).

Ulteriori studi permisero a Nishioka e Hirakawa (Nishioka, 1969c) di investigare l'effetto di una tensione media sulla vita a fatica da contatto, e di concludere come tale tensione, al pari della fatica pura, avesse un'importanza rilevante sulla fase di propagazione delle fessure e, conseguentemente, sulla riduzione della vita a fatica. Inoltre, Nishioka e Hirakawa (Nishioka, 1969d) confermarono sperimentalmente gli studi analitici condotti da Cattaneo (Cattaneo, 1938) e Mindlin (Mindlin, 1949), relativamente alla presenza di regioni di aderenza (*stick*) e regioni di scorrimento (*slip*) sulla superficie di contatto, in regime di scorrimento parziale. In particolare, Nishioka e Hirakawa notarono come vi fosse una proporzionalità diretta tra carico tangenziale applicato ai corpi e lo scorrimento tra di essi. Successivamente, nel 1972, Nishioka e Hirakawa (Nishioka, 1972) analizzarono anche l'influenza della durezza dei materiali sulla vita a fatica, notando tuttavia come questa non avesse un effetto rilevante.

Sulla base dei risultati ottenuti da Nishioka e Hirakawa, intensive campagne di prove sperimentali vennero condotte nei successivi vent'anni, con lo scopo di standardizzare le procedure di prova per l'analisi di componenti soggetti a fatica da contatto. In tale contesto, negli anni '90, diverse tipologie di test vennero

disciplinate, come il *grip-type* (Hutson, 1999), il *single-clamp* (Szolwinski, 1998) e il *bridge-type* (Rayaprolu, 1992).

Negli ultimi vent'anni, l'interesse crescente nel campo della fatica da contatto ha portato ad un aumento considerevole delle pubblicazioni scientifiche sull'argomento, soprattutto in relazione a problematiche non solo economiche, ma soprattutto in termini di salvaguardia della vita umana.

Lo studio dello stato dell'arte mostra come siano diversi gli approcci proposti per l'analisi di componenti soggetti a fatica da contatto. In tale contesto, i criteri di fatica multiassiale sono ampiamente i più utilizzati, in quanto i carichi presenti nella fatica da contatto generano, all'interno dei componenti, stati tensionali multiassiali. Tuttavia, rispetto alla fatica pura, l'ulteriore presenza del contatto contribuisce alla complicazione dell'analisi. Infatti, alcuni studi (Dobromirski, 1992; Hills, 1994) mostrano come siano oltre cinquanta i parametri che governano il comportamento a fatica da contatto del componente, e la loro interazione non è facilmente quantificabile (Houghton, 2009). Ciò nonostante, è comunemente accettato come i parametri principali che maggiormente influenzano il comportamento a fatica siano (Dobromirski, 1992; Hills, 1994): pressione di contatto, coefficiente di attrito, ampiezza degli spostamenti relativi tra i corpi e carichi di fatica applicati.

Ad oggi, la ricerca nel campo della fatica da contatto risulta essere piuttosto aperta, mancando ancora un approccio universalmente accettato dalla comunità scientifica. Nella presente Tesi, il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013; Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015) viene impiegato congiuntamente ad approcci non-locali, al fine di analizzare il comportamento a fatica di componenti strutturali soggetti a fatica da contatto.

### 1.3 Conclusioni

Nel presente Capitolo è stato introdotto il fenomeno della fatica nei componenti strutturali soggetti a contatto (*fretting fatigue*). Tale fenomeno risulta avere un'importanza notevole e un interesse crescente in diverse applicazioni industriali, soprattutto in relazione ai danni che una eventuale crisi può comportare. Infatti, sono diversi i casi documentati in cui la rottura di componenti strutturali può essere associata alla fatica da contatto.

Più precisamente, in funzione dell'ampiezza degli spostamenti tra i componenti, possono instaurarsi due regimi:

- slittamento totale, cui è associata l'usura e la perdita di materiale;
- scorrimento parziale, cui è associata un'elevata concentrazione tensionale e l'eventuale insorgenza di fessure.

Lo studio dello stato dell'arte ha mostrato come, in passato, la fatica da contatto fosse considerata come una disciplina separata rispetto a quella della fatica pura. Tuttavia, soprattutto negli ultimi vent'anni, molti dei criteri di fatica multiassiale disponibili in letteratura sono stati estesi alla fatica da contatto.

L'applicazione di tali criteri richiede, generalmente, la conoscenza dello stato di tensione/deformazione all'interno del componente. Per tale ragione, il successivo Capitolo è dedicato all'analisi delle tensioni e degli spostamenti indotti all'interno di due corpi soggetti a fatica da contatto. In particolare, verranno fornite le formulazioni analitiche per il calcolo del tensore degli sforzi, in presenza di contatti cilindrici e contatti sferici.

## 1.4 Bibliografia

- Araújo J.A., Mamiya E.N., Vivacqua R.C. (2003) On the application of the Dang Van criterion in fretting fatigue. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Part I: assessment of contact size effects*.
- Buciumeanu M. (2009) *Prediction of fretting fatigue life*. Ph.D. Thesis, University of Minho, Guimaraes.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Multiaxial fatigue life estimation in welded joints using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 31, 188-196.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. (2013) Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 870-883.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) On the use of the Prismatic Hull method in a critical plane-based multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue* 68, 159-167.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.
- Cattaneo C. (1938) Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei* 27, 342-348.
- Dobromirski J.M. (1992) Variables of fretting process: are there 50 of them? In: Attia M.H., Waterhouse R.B., editors. *Standardization of fretting fatigue test methods and equipment*. ASTM STP 1159, Philadelphia, 60-66.
- Doeser B. (1981) *The study of fretting fatigue using finite element analysis and electron microscopy*. Ph.D. Thesis, Nottingham University.
- Eden E.M., Rose W.N., Cunningham F.L. (1911) Endurance of Metals. *Proceedings of the Institution of mechanical Engineers* 4, 839-974.
- Edwards P.R., Ryman R.J., Cook R. (1981) *The application of fracture mechanics to predicting fretting fatigue*. Applied Science Publishers Ltd., Essex, England.

- 
- Fenner A.J., Wright K.H.R., Mann J.Y. (1956) Fretting corrosion and its influence on fatigue failure. *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*, Londra.
- Fenner A.J., Field J.E. (1960) A study of the onset of fatigue damage due to fretting. *Proceedings of North-East Coast Institute of Engineers and Shipbuilders* 76, 183.
- Hills D.A., Nowell D. (1994) *Mechanics of Fretting Fatigue*. Kluwer Academic Publishers, Londra.
- Houghton D., Wavish P.M., Williams E.J., Leen S.B. (2009) Multiaxial fretting fatigue testing and prediction for splined couplings. *International Journal of Fatigue* 31, 1805-1815.
- Hutson A.L., Nicholas T., Goodman R. (1999) Fretting fatigue of Ti-6Al-4V under flat-on-flat contact. *International Journal of Fatigue* 21, 663-669.
- Lemm J.D., Warmuth A.R., Pearson S.R., Shipway P.H. (2015) The influence of surface hardness on the fretting wear of steel pairs - its role in debris retention in the contact. *Tribology International* 81, 258-266.
- McDowell J.R. (1953) Fretting corrosion tendencies of several combinations of materials. *Symposium on Fretting Corrosion, ASTM STP 44*, 24-39.
- Milestone W.D. (1970) Fretting and fretting fatigue in metal to metal contacts. *Proceedings of AIAA Structural Dynamics and Materials Conference*, 86.
- Mindlin R.D. (1949) Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics* 16, 259-268.
- Nesládek M., Španiel M., Jurenka J., Růžička J., Kuželka J. (2012) Fretting fatigue-experimental and numerical approaches. *International Journal of Fatigue* 44, 61-73.
- Nishioka K., Hirakawa K. (1969a) Fundamental investigations of fretting fatigue (part 2). *Bulletin of Japan Society Mechanical Engineers* 50, 180-187.
- Nishioka K., Hirakawa K. (1969b) Fundamental investigations of fretting fatigue (part 3). *Bulletin of Japan Society Mechanical Engineers* 51, 397-407.
- Nishioka K., Hirakawa K. (1969c) Fundamental investigations of fretting fatigue (part 4). *Bulletin of Japan Society Mechanical Engineers* 52, 408-414.
- Nishioka K., Hirakawa K. (1969d) Fundamental investigations of fretting fatigue (part 5). *Bulletin of Japan Society Mechanical Engineers* 52, 692-697.

- 
- Nishioka K., Hirakawa K. (1972) Fundamental investigations of fretting fatigue (part 6). *Bulletin of Japan Society Mechanical Engineers* 80, 135-144.
- Rayaprolu D.B., Cook R. (1992) A critical review of fretting fatigue investigations at the Royal Aerospace Establishment. In: Attia M.H., Waterhouse R.B., editors. *Standardization of fretting fatigue test methods and equipment*. ASTM STP 1159, Philadelphia, 129-152.
- Proudhon H., Fouvry S., Yantio G.R. (2006) Determination and prediction of the fretting crack initiation: introduction of the (P, Q, N) representation and definition of a variable process volume. *International Journal of Fatigue* 28, 707-713.
- Szolwinski M.P., Farris T.N. (1998) Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy. *Wear* 221, 24-36.
- Tomlinson G.A. (1927) The rusting of steel surfaces in contact. *Proceedings of the Royal Society A* 115, 472-483.
- Tomlinson G.A., Thorpe P.L., Gough H.J. (1939) An investigation of the fretting corrosion of closely fitting surfaces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers E* 141, 223-249.
- Warlow-Davies E.J. (1941) Fretting corrosion and fatigue strength: brief results of preliminary experiments. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers E* 146, 33-38.
- Waterhouse R.B. (1992) The problems of fretting fatigue testing. In: Attia M.H., Waterhouse R.B., editors. *Standardization of fretting fatigue test methods and equipment*. ASTM STP 1159, Philadelphia, 13-19.





## ANALISI DELLE TENSIONI E DEGLI SPOSTAMENTI IN PRESENZA DI CONTATTO

---

### ANALYSIS OF STRESSES AND STRAINS IN PRESENCE OF CONTACT

*The present Chapter deals with the analysis of stress field induced into two bodies pressed against each other, subjected to both static and cyclic tangential loadings.*

*The contact between two bodies is defined to be conforming when the surfaces of the bodies fit exactly, without any deformation. In such a case, the contact occurs in one point (contact point) or along a line (contact line), depending on the geometry of the bodies. On the other hand, the contact is defined to be non-conforming when the two bodies have different profiles: in such a case, the contact occurs on a surface with sizes generally small compared to the sizes of the bodies, and the points of such a contact surface are characterised by high concentrations of stresses. Non-conforming contacts are typical of all deformable bodies, and they are treated in the present Ph.D. Thesis.*

*In particular, the contact between both cylindrical and spherical bodies is examined, since such configurations represent the most common schemes used in experimental tests in the context of fretting fatigue studies.*

*Initially, the contact theory of Hertz (Hertz, 1896) is outlined allowing to define the shape and sizes of the contact surface between bodies, as well as the normal distribution of loadings on such a surface. Then, the expressions to calculate the stress tensor components are given (Flamant, 1982; Hamilton, 1983; McEwen, 1949).*

*Subsequently, a static tangential loading lower than the limit value of sliding is considered in the contact zone between the two bodies. Such a loading leads to a contact in partial sliding regime, that represents the most critical situation in terms*

*of fretting failure (Madge, 2007; Araújo, 2015). The partial sliding regime implies the presence of two regions within the contact surface: one characterised by sliding and the other one characterised by perfect adherence between the two bodies. By employing the results by Cattaneo (Cattaneo, 1938) and Mindlin (Mindlin, 1949), the distribution of tangential loading on the contact surface can be determined, as well as the stress tensor components at a generic point of the bodies (Flamant, 1892; Hamilton, 1983; McEwen, 1949).*

*Finally, tangential cyclic loadings (which are typical in the case of fretting fatigue) are also taken into account, and their influence on tangential loading distribution acting on the contact surface is evaluated (Hills, 1993; Hills, 1994).*

## **2.1 Introduzione**

Il presente Capitolo è dedicato all'analisi dello stato tensionale indotto all'interno di due corpi posti in contatto tra loro, soggetti a carichi tangenziali di natura statica e ciclica.

Un contatto viene definito conforme quando le superfici dei due corpi si adattano perfettamente, senza deformazioni. In tal caso, il contatto si esplica in un punto (punto di contatto) o lungo una linea (linea di contatto), in funzione della geometria dei due corpi. Si parla invece di contatto non-conforme quando i due corpi possiedono profili differenti: in questo caso il contatto avviene su una superficie di dimensioni generalmente contenute rispetto alle dimensioni dei corpi, e i punti di tale superficie di contatto sono caratterizzati da un'elevata concentrazione tensionale. I contatti non-conformi sono tipici di tutti i corpi deformabili, e sono oggetto della presente Tesi di Dottorato.

In particolare, viene considerato il contatto tra corpi cilindrici e il contatto tra corpi sferici, poiché tali configurazioni rappresentano gli schemi più comuni di prove sperimentali condotte nell'ambito dello studio della fatica da contatto.

Inizialmente viene richiamata la teoria del contatto di Hertz (Hertz, 1896), che permette di definire la forma e le dimensioni della superficie di contatto tra i corpi, oltre che la distribuzione dei carichi normali che si generano su tale superficie. Vengono, quindi, fornite le espressioni per il calcolo delle componenti del tensore degli sforzi (Flamant, 1892; Hamilton, 1983; McEwen, 1949).

Successivamente viene considerata, nei due corpi posti a contatto, la presenza di una forza tangenziale in regime statico, inferiore al valore al limite dello slittamento. Ciò comporta la nascita di un regime di scorrimento parziale tra i corpi, cui corrisponde la situazione più critica in termini di crisi a frattura da contatto (Madge, 2007; Araújo, 2015). Tale scorrimento parziale comporta la nascita, all'interno della superficie di contatto, di due regioni: una in cui si ha slittamento e una in cui si ha perfetta aderenza tra i corpi. Impiegando i risultati ottenuti da Cattaneo (Cattaneo, 1938) e Mindlin (Mindlin, 1949) viene determinata la distribuzione dei carichi tangenziali sulla superficie di contatto e le componenti del tensore degli sforzi in un generico punto all'interno dei corpi (Flamant, 1892; Hamilton, 1983; McEwen, 1949).

Infine, viene considerata anche la presenza di carichi tangenziali di natura ciclica, situazione tipica della fatica da contatto, e viene valutata la loro influenza sulla distribuzione dei carichi tangenziali agenti sulla superficie di contatto (Hills, 1993; Hills, 1994).

## 2.2 Teoria di Hertz

Si considerino due solidi non-conformi, caratterizzati cioè da profili differenti, posti in contatto tra loro. Inizialmente, cioè prima dell'azione dei carichi, la zona di contatto tra tali solidi è un punto o una linea, in funzione della geometria degli stessi. Successivamente, sotto l'azione di un carico o di uno spostamento esterno, i solidi si deformano e la zona di contatto diventa un'area di dimensioni finite, funzione dell'entità dei carichi applicati.

Il ricorso alla teoria del contatto risulta, quindi, necessaria al fine di prevedere la forma e la dimensione della superficie del contatto, l'intensità e la distribuzione dei carichi superficiali e degli spostamenti indotti nei solidi.

Si considerino due corpi, definiti nel seguito corpo 1 e corpo 2, rispettivamente, caratterizzati da superfici lisce sia alla micro- che alla macro-scala, cioè si assume implicitamente l'ipotesi iniziale di assenza di attrito. Tali corpi si considerano posti in contatto in un punto  $O$ , origine del sistema di riferimento  $Oxyz$  (Figura 2.1).

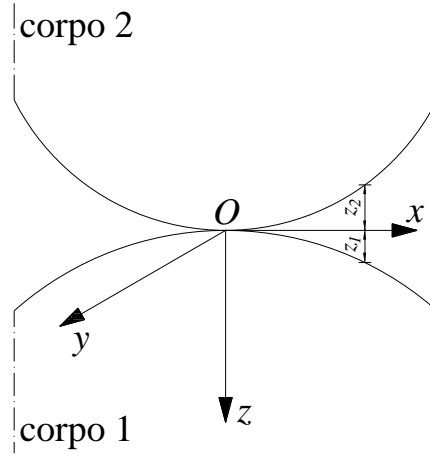


Figura 2.1 Configurazione geometrica considerata.

Il profilo della superficie di ogni corpo può essere approssimato, in una regione nell'intorno dell'origine, ad una forma parabolica rappresentata dalle seguenti espressioni quadratiche:

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy \quad (2.1a)$$

$$z_2 = -(A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 xy) \quad (2.1b)$$

in cui i termini di ordine superiore vengono trascurati.  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$  sono costanti positive che dipendono dalla forma dei corpi posti a contatto. È possibile individuare un opportuno orientamento degli assi  $x$  e  $y$ ,  $x_1$  e  $y_1$ , tale per cui il termine misto diventa nullo, e le Eqs. (2.1) possono essere riscritte come segue:

$$z_1 = \frac{1}{2R'_1} x_1^2 + \frac{1}{2R''_1} y_1^2 \quad (2.2a)$$

$$z_2 = -\left( \frac{1}{2R'_2} x_1^2 + \frac{1}{2R''_2} y_1^2 \right) \quad (2.2b)$$

in cui  $R'_1$  e  $R''_1$  rappresentano i raggi di curvatura, in corrispondenza del punto  $O$ , per il corpo 1, mentre  $R'_2$  e  $R''_2$  rappresentano i raggi di curvatura, in corrispondenza del punto  $O$ , per il corpo 2.

La distanza tra le due superfici,  $h$ , può quindi essere scritta come segue (*Figura 2.1*):

$$h = z_1 - z_2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2 = Ax^2 + By^2 \quad (2.3)$$

in cui  $R'$  e  $R''$  rappresentano i raggi principali di curvatura relativa, mentre  $A$  e  $B$  sono due costanti definite positive. È possibile dimostrare che, se gli assi  $x_1$  e  $x_2$  risultano essere inclinati tra loro di un angolo  $\alpha$ , i valori di  $A$  e  $B$  si possono determinare impiegando le seguenti equazioni:

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right) \quad (2.4a)$$

$$|B - A| = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right) \left( \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos 2\alpha \quad (2.4b)$$

In particolare, da tali equazione è possibile osservare che:

- i) se i due corpi sono solidi di rivoluzione, si ottiene  $A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ . Il

luogo di punti ad  $h$  costante è rappresentato da cerchi concentrici nell'origine  $O$ ;

- ii) se i due corpi sono cilindrici, e posti in contatto longitudinalmente ai loro assi,

si ottiene  $A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ,  $B = 0$ . Il luogo dei punti ad  $h$  costante è

rappresentato da strisce parallele all'asse longitudinale dei corpi;

- iii) se i due corpi hanno forma generica,  $A$  e  $B$  assumono anch'essi una generica espressione. Il luogo dei punti ad  $h$  costante è rappresentato da ellissi concentriche nell'origine  $O$ .

Si consideri ora la situazione deformata (linea tratteggiata, *Figura 2.2*), indotta dall'applicazione di un carico di compressione,  $P$ , su entrambi i corpi di forma generica, ma assunti essere convessi per semplicità.

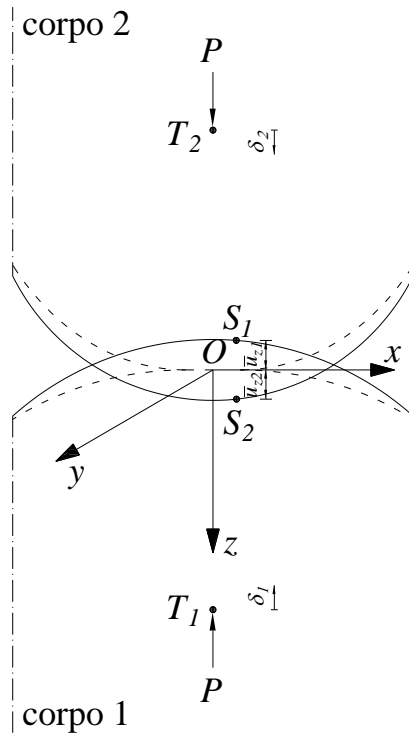


Figura 2.2 Configurazione geometrica deformata (linea tratteggiata).

I punti  $T_1$  e  $T_2$ , assunti ragionevolmente distanti dalla superficie di contatto, traslano verso l'origine del sistema di riferimento  $O$ , mentre i punti appartenenti alla superficie di contatto,  $S_1 \equiv (x, y, z_1)$  e  $S_2 \equiv (x, y, z_2)$ , si spostano in direzione  $z$  di una quantità pari a  $\bar{u}_{z1}$  e  $\bar{u}_{z2}$  misurata da, rispettivamente,  $T_1$  e  $T_2$ . In tale situazione possono, quindi, presentarsi i seguenti due casi:

- i)  $S_1$  coincide con  $S_2$ , ossia tali punti si trovano all'interno della superficie di contatto. Vale, quindi, la seguente uguaglianza:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} + h = \delta_1 + \delta_2 \quad (2.5)$$

che, considerando l'Eq.(2.3), può essere riscritta come segue:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (2.6)$$

ii)  $S_1$  non coincide con  $S_2$ , ossia tali punti si trovano all'esterno della superficie di contatto. Vale la seguente disuguaglianza:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - Ax^2 - By^2 \quad (2.7)$$

Al fine di analizzare la configurazione deformata dovuta al contatto, risulta quindi necessaria la determinazione della distribuzione del campo di pressioni in corrispondenza delle superfici di contatto, affinché gli spostamenti normali indotti soddisfino l'Eq.(2.6), all'interno della zona di contatto, e l'Eq.(2.7), all'esterno di tale zona.

Heinrich Hertz (Hertz, 1896) fu il primo a ottenere importanti risultati nell'ambito del campo di tensioni in corrispondenza della superficie di contatto tra due corpi elastici. Dallo studio dell'interferenza ottica delle frange di Newton, in termini di distanza tra due lenti poste a contatto e compresse l'una contro l'altra, Hertz notò come la deformazione elastica delle superfici dipendesse dalla pressione di contatto tra tali lenti. Quindi, al fine di semplificare il problema, introdusse alcune ipotesi semplificative. In particolare, indicando con  $a$  la semi-larghezza della regione di contatto, con  $R$  il raggio di curvatura relativa, con  $l$  la profondità dei corpi, con  $\varepsilon_s$  la deformazione in corrispondenza dello snervamento del materiale, e con  $\mu$  il coefficiente di attrito, Hertz assunse che:

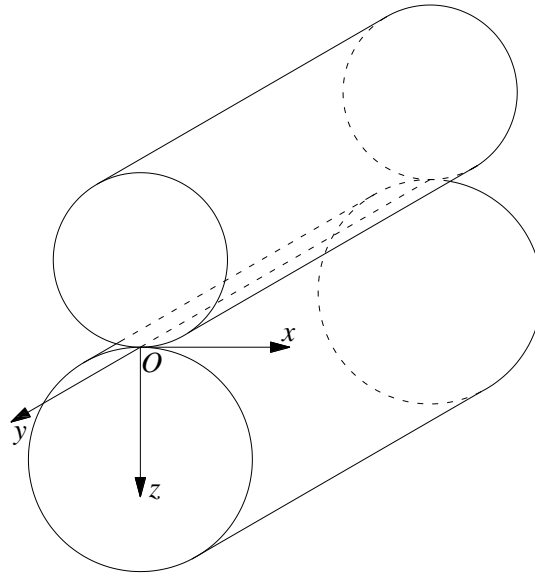
- 1) ogni corpo può essere considerato come un semi-spazio elastico, caricato sulla superficie libera in una regione di forma ellittica. Tale ipotesi consente di ottenere un campo di tensioni/deformazioni che non risulta essere influenzato dalla presenza dei bordi del corpo ( $a \ll l$ );
- 2) la larghezza della superficie di contatto è trascurabile rispetto ai raggi relativi di curvatura di ogni corpo. Tale ipotesi consente di approssimare la superficie di contatto ad un semi-spazio elastico ( $a \ll R$ );
- 3) le deformazioni nella regione di contatto risultano sufficientemente piccole, per cui vale la teoria dell'elasticità ( $\varepsilon < \varepsilon_s$ );
- 4) le superfici sono prive di attrito, tale per cui vengono trasmessi solo carichi normali tra le superfici ( $\mu=0$ );

Sotto tali ipotesi iniziali, Hertz analizzò il problema del contatto tra due corpi elastici di forma generica.

Nel presente lavoro di Tesi vengono analizzate geometrie cilindriche (Sezione 2.2.1) e sferiche (Sezione 2.2.2).

### 2.2.1 Contatto cilindrico

Si considerino due corpi cilindrici, caratterizzati da assi longitudinali paralleli, posti in contatto tra loro, come mostrato in *Figura 2.3*.



*Figura 2.3* Contatto tra corpi cilindrici.

La superficie di contatto, rappresentata da una striscia parallela agli assi dei cilindri e di larghezza pari a  $2a$ , può essere considerata come il caso limite di una superficie ellittica, tipica di un contatto tra corpi di forma generica, caratterizzata da uno dei due assi tendente a infinito. In particolare, il problema esaminato risulta essere in stato piano di deformazione e quindi, per la geometria considerata in *Figura 2.3*, funzione delle sole coordinate  $x$  e  $z$ . Impiegando l'*Eq.(2.3)* è possibile esprimere la distanza di separazione tra i due corpi,  $h$ , come:



$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 = \frac{1}{2R} x^2 \quad (2.8)$$

dove il raggio di curvatura,  $1/R$ , è pari a  $(1/R_1 + 1/R_2)$ . Quindi, per i punti situati all'interno della superficie di contatto, deve essere rispettata la condizione rappresentata dall'Eq.(2.6):

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R} x^2 \quad (2.9)$$

mentre, per i punti all'esterno della superficie di contatto, deve valere l'Eq.(2.7):

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - \frac{1}{2R} x^2 \quad (2.10)$$

Impiegando la teoria di Hertz, è possibile determinare univocamente la distribuzione di carico normale,  $p(x)$ , che soddisfa le Eqs.(2.9)-(2.10). In particolare, differenziando ambo i membri dell'Eq.(2.9) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\frac{1}{R} x \quad (2.11)$$

e sfruttando i risultati riportati da Johnson (Johnson, 1985), relativi al campo di spostamenti indotto in un semi-spazio dalla presenza di carico normale, si può scrivere:

$$\frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_{z2}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (2.12)$$

dove  $E^* = E/(1-\nu^2)$  rappresenta il modulo di elasticità nel caso di stato piano di deformazione. Nel caso di due corpi posti a contatto, il modulo di elasticità tangenziale può esprimersi come:  $1/E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$ . Dalle Eqs.(2.11)-(2.12) deriva, quindi:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{\pi E^*}{2R} x \quad (2.13)$$

da cui, impiegando un cambio di variabile, è possibile ottenere la distribuzione del carico normale,  $p(x)$ , pari a:

$$p(x) = -\frac{\pi E^*}{2R} \frac{x - \frac{a^2}{2}}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (2.14)$$

dove  $P$  rappresenta la forza con cui i due corpi vengono posti in contatto. È possibile dimostrare (Hertz, 1896; Johnson, 1985) che, al fine di avere una distribuzione normale  $p(x)$  di compressione in tutta la superficie di contatto e un gradiente tensionale finito agli estremi di tale superficie, la forza  $P$  deve essere pari a:

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4R} \quad (2.15)$$

Quindi, impiegando l'Eq.(2.14) congiuntamente all'Eq.(2.15), è possibile determinare la semi-larghezza della superficie di contatto,  $a$ , la quale risulta pari a:

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}} \quad (2.16)$$

L'Eq.(2.14) può quindi essere riscritta come segue:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.17)$$

la quale rappresenta la distribuzione del carico normale scambiato, in corrispondenza della superficie di contatto, tra due corpi cilindrici. Tale distribuzione, denominata Hertziana, è caratterizzata da un andamento parabolico, il cui valore massimo,  $p_0$ , è pari a:

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \sqrt{\frac{PE^*}{\pi R}} \quad (2.18)$$

che viene raggiunto in corrispondenza del punto centrale della superficie di contatto ( $x=0$ , *Figura 2.3*).

La determinazione dello stato tensionale in presenza di contatto cilindrico venne inizialmente fornita, in forma approssimata, da McEwen (McEwen, 1949). In particolare, considerando la configurazione geometrica riportata in *Figura 2.3* (composta di due corpi cilindrici posti in contatto inizialmente nel solo punto  $O$  e soggetti ad un carico normale  $P$ ), è possibile esprimere le componenti del tensore degli sforzi prodotte da un generico carico  $P$ ,  $\sigma_{x,P}$ ,  $\sigma_{z,P}$ , e  $\tau_{xz,P}$ , come (Johnson, 1985):

$$\sigma_{x,P} = -\frac{2P}{\pi a^2} \left[ m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right] \quad (2.19a)$$

$$\sigma_{z,P} = -\frac{2P}{\pi a^2} m \left( 1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (2.19b)$$

$$\tau_{xz,P} = \begin{cases} \frac{2P}{\pi a^2} n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) & \text{per } x < 0 \\ -\frac{2P}{\pi a^2} n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.19c)$$

dove i termini  $m$  e  $n$  risultano:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right]^{0.5} + (a^2 - x^2 + z^2) \right\}} \quad (2.20a)$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right]^{0.5} - (a^2 - x^2 + z^2) \right\}} \quad (2.20b)$$

### 2.2.2 Contatto sferico

Si considerino due corpi sferici, di raggio  $R_1$  e  $R_2$  rispettivamente, posti in contatto tra loro, come mostrato in *Figura 2.4*. La superficie di contatto, rappresentata da un cerchio di raggio  $a$ , può essere considerata come il caso limite di una superficie ellittica caratterizzata da assi di pari lunghezza.

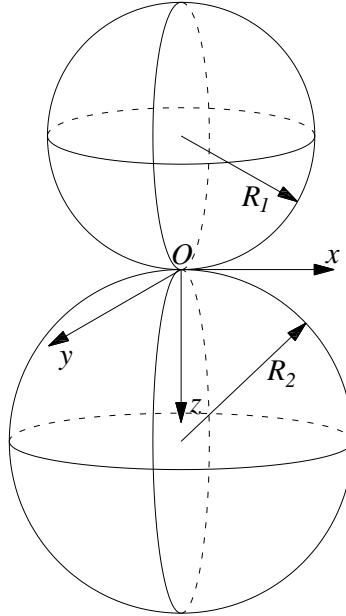


Figura 2.4 Contatto tra corpi sferici.

Analogamente al caso di contatto tra corpi cilindrici (Sezione 2.2.1), è possibile esprimere la distanza di separazione tra i due corpi,  $h$ , come:

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) y^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) r^2 = \frac{1}{2R} r^2 \quad (2.21)$$

dove la distanza dall'origine  $O$ ,  $r$ , è pari a  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Per i punti situati all'interno della superficie di contatto, nel caso di contatto sferico l'Eq.(2.6) assume la seguente forma:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (2.22)$$

mentre, per i punti all'esterno della superficie, l'Eq.(2.7) diventa:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} > \delta - \frac{1}{2R} r^2 \quad (2.23)$$

Sotto l'ipotesi iniziale di poter assumere il profilo dei due corpi posti a contatto a due paraboloidi (approssimazione accettabile per corpi sferici), Hertz propose una formulazione per la distribuzione normale,  $p(x)$ , caratterizzata da un profilo parabolico. In particolare, Hertz dimostrò che per rispettare le *Eqs.*(2.22)-(2.23), per  $p(x)$  dovevano valere le seguenti equazioni:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad (2.24a)$$

$$p(x, y) = \frac{P_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}} \quad (2.24b)$$

È possibile dimostrare che la distribuzione di carico normale di cui all'*Eq.*(2.24b) produce spostamenti normali alla superficie di contatto costanti, in contrasto con le evidenze sperimentali di Hertz. Inoltre, tale distribuzione produce un gradiente di spostamenti che tende a infinito in corrispondenza della frontiera della superficie di contatto, condizione non ammissibile per due corpi di forma sferica (e più in generale paraboloidica).

Per tali motivi, Hertz concluse che la distribuzione di carico normale generata sulla superficie di contatto tra due sfere, fosse descritta dall'*Eq.*(2.24a) o, equivalentemente:

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (2.25)$$

Impiegando i risultati ottenuti da Boussinesq (Boussinesq, 1885), relativi al campo di spostamenti indotto da una forza concentrata agente in un semi-spazio elastico, Hertz determinò gli spostamenti normali alla superficie di contatto:

$$\bar{u}_z = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi P_0}{4a} (2a^2 - r^2) \quad \text{per } z = 0, r \leq a \quad (2.26)$$

Considerando che, per equilibrio, la pressione agente sul corpo 1 è uguale e opposta alla pressione agente sul corpo 2, è possibile scrivere, sostituendo l'*Eq.*(2.26) all'interno dell'*Eq.*(2.22):

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*}(2a^2 - r^2) = \delta - \left(\frac{1}{2R}\right)r^2 \quad (2.27)$$

da cui è possibile determinare il raggio della superficie di contatto circolare,  $a$ , pari a:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*} \quad (2.28)$$

La forza totale con cui i due corpi sferici vengono posti in contatto,  $P$ , può essere determinata come risultante della distribuzione di carico normale sulla superficie di contatto, ossia:

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \quad (2.29)$$

Essendo sperimentalmente più utile fare riferimento al carico totale con cui i due corpi vengono posti in contatto piuttosto che alla pressione  $p_0$ , l'Eq.(2.29) può essere riscritta come:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{4E^*}} \quad (2.30)$$

mentre il valore massimo della pressione normale,  $p_0$ , può esprimersi come:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^2}} \quad (2.31)$$

valore raggiunto in corrispondenza del punto centrale di tale superficie di coordinate  $x=y=0$  (Figura 2.4).

La determinazione dello stato tensionale in presenza di contatto sferico viene fornita, in forma approssimata, da Hamilton (Hamilton, 1983). In particolare, considerando la geometria riportata in Figura 2.4 composta di due corpi sferici posti in contatto inizialmente nel solo punto  $O$ , e soggetti ad un carico normale  $P$ , è possibile esprimere le componenti del tensore degli sforzi come segue:

$$\sigma_{x,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ (1+\nu)z\phi + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{y^2 - x^2}{r^2} [(1-\nu)Nz^2 - \frac{1-2\nu}{3}(NS + 2AN + a^3) - \nu Mza] - N(x^2 + 2\nu y^2) - \frac{Mx^2 za}{S} \right\} \right] \quad (2.32a)$$

$$\sigma_{y,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ (1+\nu)z\phi + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{x^2 - y^2}{r^2} [(1-\nu)Nz^2 - \frac{1-2\nu}{3}(NS + 2AN + a^3) - \nu Mza] - N(y^2 + 2\nu x^2) - \frac{My^2 za}{S} \right\} \right] \quad (2.32b)$$

$$\sigma_{z,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ -N + \frac{azM}{S} \right] \quad (2.32c)$$

$$\tau_{xy,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ \frac{xy(1-2\nu)}{r^4} \left\{ -Nr^2 + \frac{2}{3}N(S+2A) - z(zN+aM) + \frac{2}{3}a \right\} + \frac{xyz}{r^4} \left\{ -\frac{aMr^2}{S} - zN + aM \right\} \right] \quad (2.32d)$$

$$\tau_{yz,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ -z \left\{ \frac{yN}{S} - \frac{yzH}{G^2 + H^2} \right\} \right] \quad (2.32e)$$

$$\tau_{zx,P} = \frac{3P}{2\pi a^3} \left[ -z \left\{ \frac{xN}{S} - \frac{xzH}{G^2 + H^2} \right\} \right] \quad (2.32f)$$

dove:

$$A = r^2 + z^2 - a^2 \quad (2.33a)$$

$$S = \sqrt{A^2 + 4a^2 z^2} \quad (2.33b)$$

$$M = \sqrt{\frac{S+A}{2}} \quad (2.33c)$$

$$N = \sqrt{\frac{S - A}{2}} \quad (2.33d)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a}{M}\right) \quad (2.33e)$$

$$G = M^2 - N^2 + zM - aN \quad (2.33f)$$

$$H = 2MN + aM + zN \quad (2.33g)$$

### 2.3 Carico tangenziale alla superficie di contatto in regime statico: parziale scorrimento (contatto incipiente)

Nella presente Sezione viene analizzato l'effetto sullo stato tensionale e sul campo di spostamenti prodotto da una forza tangenziale,  $Q$ , nel contatto tra due corpi. Tale situazione è tipica di un contatto reale, in cui l'attrito o piccoli scorrimenti tra i corpi provocano la nascita di carichi tangenziali, non considerati nella teoria del contatto di Hertz.

In particolare, si considerino due corpi di forma generica, corpo 1 e corpo 2 rispettivamente, entrambi soggetti ad una forza normale di compressione  $P$  e ad una forza tangenziale  $Q$ , come mostrato in *Figura 2.5*.

Inizialmente, viene analizzato l'effetto prodotto dalle forze tangenziali sulla dimensione e sulla forma della superficie di contatto, nonché la distribuzione di carico normale su di essa. Per ragioni di equilibrio, la distribuzione del carico tangenziale sulla superficie del corpo 1,  $q_1(x,y)$ , deve essere uguale, in intensità e direzione, alla distribuzione del carico tangenziale sulla superficie 2,  $q_2(x,y)$ , ma di verso opposto:

$$q_1(x,y) = -q_2(x,y) \quad (2.34)$$



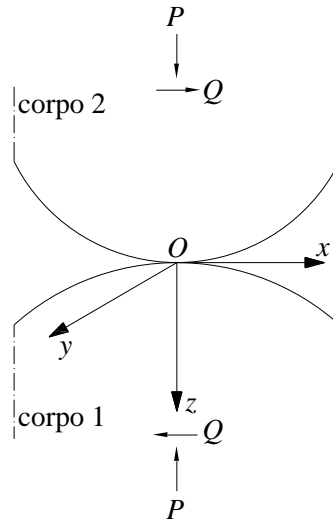


Figura 2.5 Contatto incipiente tra corpi di forma generica.

Dagli studi condotti da Boussinesq (Boussinesq, 1885) è possibile affermare come gli spostamenti normali alla superficie di contatto siano proporzionali, per ognuno dei due corpi, alla quantità  $G/(1-2\nu)$ , dove  $G$  rappresenta il modulo di elasticità tangenziale. Considerando l'Eq.(2.34), è pertanto possibile scrivere:

$$\frac{G_1}{1-2\nu_1} \bar{u}_{z1}(x, y) = -\frac{G_2}{1-2\nu_2} \bar{u}_{z2}(x, y) \quad (2.35)$$

dove  $\bar{u}_{z1}(x, y)$  e  $\bar{u}_{z2}(x, y)$  rappresentano gli spostamenti di un punto sulla superficie di contatto del corpo 1 e del corpo 2, rispettivamente. I termini  $\nu_1$  e  $\nu_2$ ,  $G_1$  e  $G_2$  rappresentano, rispettivamente, il coefficiente di Poisson e il modulo di elasticità tangenziale del corpo 1 e del corpo 2. Dall'Eq.(2.35) si osserva che, se due corpi possiedono le stesse proprietà elastiche, i carichi tangenziali trasmessi generano spostamenti normali nel corpo 1 uguali e opposti a quelli nel corpo 2 (ossia  $\bar{u}_{z1}(x, y) = -\bar{u}_{z2}(x, y)$ ). Per tale ragione, le superfici dei due corpi si deformano conformemente tra loro, senza influenzare la dimensione e la forma della superficie di contatto, la quale risulta quindi essere indipendente dalla forza tangenziale,  $Q$ , e quindi funzione del solo carico normale,  $P$ .

Se i due corpi, invece, possiedono caratteristiche meccaniche differenti, la presenza della forza tangenziale,  $Q$ , influenza la distribuzione del carico normale,

$p(x)$ , e, conseguentemente, la dimensione e la forma della superficie di contatto. Tale influenza fu analizzata da Bufler (Bufler, 1959), il quale dimostrò analiticamente che la presenza di un carico tangenziale ha l'effetto di traslare il centro della superficie di contatto e di aumentarne le dimensioni. Ciò nonostante, per valori contenuti del coefficiente di attrito,  $\mu$ , tipici delle applicazioni meccaniche, tale influenza è trascurabile.

Per tale motivo, nel seguito viene considerato che le tensioni e le deformazioni dovute alla distribuzione normale di carico,  $p(x)$ , siano indipendenti dalle tensioni e deformazioni dovute alla distribuzione tangenziale di carico,  $q(x)$ . In particolare, per la determinazione del campo di tensioni e deformazioni, viene considerato valido il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sotto l'azione di tali distribuzioni di carico, possono verificarsi due casistiche:

- (i) scorrimento totale tra i corpi, tale per cui la forza tangenziale,  $Q$ , è determinabile a partire dal coefficiente di attrito  $\mu$  ( $Q = \mu P$ );
- (ii) scorrimento parziale tra i corpi, in cui non nascono scorrimenti relativi ma, tuttavia, vengono indotte sollecitazioni aggiuntive dovute all'attrito in corrispondenza della superficie di contatto ( $Q < \mu P$ ).

Nella presente Tesi verranno analizzati contatti in situazione di scorrimento parziale in quanto, nella maggior parte delle problematiche legate al contatto nei componenti strutturali, è raro trovare situazioni in cui si hanno scorrimenti totali (Hills, 1994). Inoltre, come sottolineato da Madge (Madge, 2007) e Araújo (Araújo, 2015) la più importante riduzione della vita utile si osserva proprio in regime di scorrimento parziale.

Si considerino quindi due corpi, corpo 1 e corpo 2, in condizione di scorrimento parziale, ossia soggetti ad una forza normale,  $P$ , e ad una forza tangenziale,  $Q$ , tale che  $Q < \mu P$ , cioè si ipotizza uno scorrimento parziale tra i due corpi (*Figura 2.6*).

Si considerino, inoltre, i punti  $T_1$  e  $T_2$ , assunti sufficientemente distanti dalla superficie di contatto, e i punti  $A_1$  e  $A_2$ , situati in corrispondenza della superficie di contatto, inizialmente coincidenti. L'effetto prodotto dalla forza tangenziale,  $Q$ , è quello di deformare a taglio i due corpi, come illustrato schematicamente dalla curva  $T_1'A_1$  e dalla curva  $T_2'A_2$ . Tali curve, in particolare, rappresentano il profilo degli spostamenti in direzione  $x$  dei punti posti inizialmente sulla retta  $T_1T_2$ , in direzione normale alla superficie di contatto (retta tratteggiata in *Figura 2.6*).

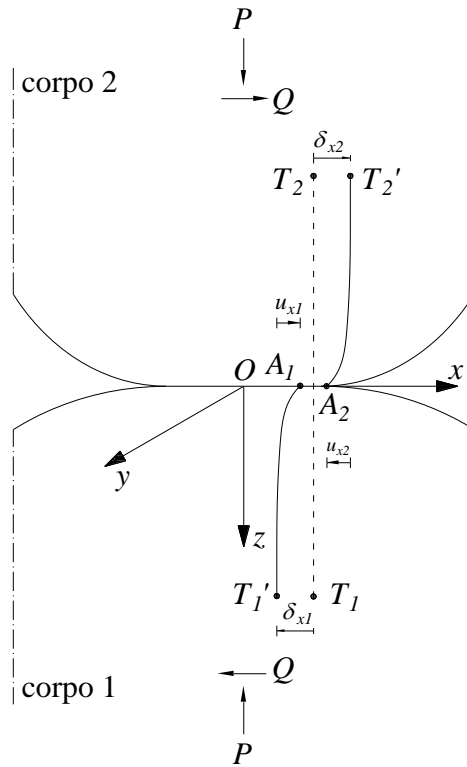


Figura 2.6 Contatto incipiente: configurazione indeformata (linea tratteggiata) e deformata (linea continua) dei punti posti inizialmente sulla retta  $T_1T_2$ .

In regime di scorrimento parziale, i due corpi non slittano totalmente l'uno rispetto all'altro e, per tale ragione, almeno un punto sulla superficie di contatto non subisce alcuno scorrimento relativo. Ciò non implica, tuttavia, che ogni punto della superficie di contatto possa scorrere. Più precisamente, la superficie di contatto risulta essere divisa in due zone: una di *slip*, in cui si ha scorrimento relativo tra le superfici poste a contatto, e una zona di *stick*, in cui le due superfici aderiscono perfettamente, senza moti relativi.

Siano  $\delta_{x1}$  e  $\delta_{x2}$  gli spostamenti dei punti  $T_1$  e  $T_2$ , rispettivamente, mentre  $\bar{u}_{x1}$  e  $\bar{u}_{x2}$  gli spostamenti dei punti  $A_1$  e  $A_2$ , rispettivamente. Lo spostamento assoluto in direzione  $x$  tra i punti  $A_1$  e  $A_2$ ,  $s_x$ , può quindi essere espresso come segue:

$$s_x = (\bar{u}_{x1} - \delta_{x1}) - (\bar{u}_{x2} - \delta_{x2}) = (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) - (\delta_{x1} - \delta_{x2}) \quad (2.36)$$

e, analogamente per lo spostamento assoluto in direzione  $y$ :

$$s_y = (\bar{u}_{y1} - \delta_{y1}) - (\bar{u}_{y2} - \delta_{y2}) = (\bar{u}_{y1} - \bar{u}_{y2}) - (\delta_{y1} - \delta_{y2}) \quad (2.37)$$

Se i punti  $A_1$  e  $A_2$  si trovano all'interno di una regione di *stick*, gli spostamenti assoluti  $s_x$  e  $s_y$  sono nulli, e quindi non si ha alcun moto relativo. Le *Eqs.*(2.36)-(2.37) assumono quindi le seguenti espressioni:

$$\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2} = \delta_{x1} - \delta_{x2} \quad (2.38a)$$

$$\bar{u}_{y1} - \bar{u}_{y2} = \delta_{y1} - \delta_{y2} \quad (2.38b)$$

da cui si può osservare come, indipendentemente dalla posizione dei punti  $A_1$  e  $A_2$ , all'interno della regione di *stick* qualsiasi punto subisce il medesimo spostamento. Inoltre, se i due corpi possiedono le stesse costanti elastiche, risultano soggetti alla stessa distribuzione di carico tangenziale  $e$ , quindi, per l'*Eq.*(2.34) è possibile affermare che:

$$\bar{u}_{x1} = -\bar{u}_{x2} \quad (2.39a)$$

$$\bar{u}_{y1} = -\bar{u}_{y2} \quad (2.39b)$$

Per i punti all'interno della superficie di contatto, il carico tangenziale distribuito,  $q(x,y)$ , non può superare il valore limite, oltre il quale si avrebbe scorrimento tra i corpi, ossia deve valere:

$$|q(x, y)| < \mu p(x, y) \quad (2.40)$$

Relativamente invece alle regioni di *slip*, in cui si ha scorrimento tra i corpi, la condizione riportata nelle *Eqs.*(2.38) non risulta essere più valida, e l'*Eq.*(2.40) può essere riscritta come segue:

$$|q(x, y)| = \mu p(x, y) \quad (2.41)$$

Deve inoltre valere la condizione per cui il verso del carico tangenziale distribuito è opposto al verso dello scorrimento relativo tra i corpi, indicato con

$s(x,y)$ , per la natura fisica del fenomeno analizzato. Più precisamente, deve essere rispettata la seguente condizione:

$$\frac{q(x,y)}{|q(x,y)|} = -\frac{s(x,y)}{|s(x,y)|} \quad (2.42)$$

Le Eqs.(2.38) e (2.40) rappresentano, quindi, le condizioni al contorno per la regione di *stick*, mentre le Eqs.(2.41) e (2.42) rappresentano le condizioni al contorno per la regione di *slip*. La distribuzione dei carichi e degli spostamenti che rispettano tali condizioni non è nota a priori e, per tale motivo, risulta utile assumere inizialmente che la regione di *stick* si estenda per tutta la superficie di contatto.

Nel seguito vengono illustrati il caso di contatto con scorrimento incipiente tra corpi cilindrici e tra corpi sferici. Tali geometrie possono apparire piuttosto idealizzate e, quindi, restrittive per la loro semplicità, ma la loro analisi è fondamentale per la comprensione del fenomeno fatica da contatto (Capitolo 4 e Capitolo 5). Infatti, lo studio di geometrie più articolate sarebbe estremamente complesso dal punto di vista analitico e un approccio numerico, ad esempio attraverso l'impiego di modelli agli elementi finiti, risulterebbe più adatto. Tuttavia, la calibrazione di tali modelli può essere piuttosto difficoltosa, a meno che non si impieghino, in una fase iniziale, geometrie semplificate di cui è nota la soluzione analitica, al fine di ottenere risultati più affidabili.

### 2.3.1 Contatto cilindrico

Si considerino due corpi cilindrici, caratterizzati da assi longitudinali paralleli, posti in contatto da una forza normale,  $P$ , e soggetti ad un carico tangenziale,  $Q$ , tale per cui  $Q \leq \mu P$  (Figura 2.7).

La semi-larghezza della zona di contatto,  $a$ , e la distribuzione del carico normale,  $p(x)$  sono fornite dalla teoria di Hertz.

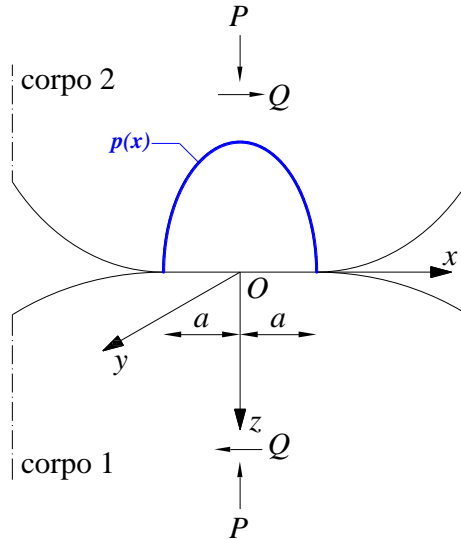


Figura 2.7 Contatto incipiente tra corpi cilindrici: geometria e distribuzione del carico normale  $p(x)$ .

Si ipotizzi, inizialmente, che il valore del coefficiente di attrito sia sufficientemente elevato, tale per cui non si ha scorrimento relativo in alcun punto della superficie di contatto. Quindi, per  $-a \leq x \leq a$ , valgono Eqs.(2.38), ossia gli spostamenti risultano essere costanti. Dalla teoria del semi-spazio elastico, è noto come la distribuzione di carico cui corrisponde un campo di spostamenti costante è pari a:

$$q(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (2.43)$$

e il suo andamento è rappresentato in Figura 2.8.

Si può notare come il valore del carico tangenziale distribuito tenda all'infinito in corrispondenza di  $x = \pm a$ , ma tale risultato è in contrasto con l'ipotesi iniziale di totale aderenza, in quanto richiederebbe un coefficiente di attrito anch'esso tendente a infinito. Quindi, è lecito assumere che possano nascere degli scorrimenti relativi in corrispondenza delle zone estreme del contatto, in cui  $q(x)$  raggiunge valori elevati, mentre vi sia aderenza nella zona centrale.

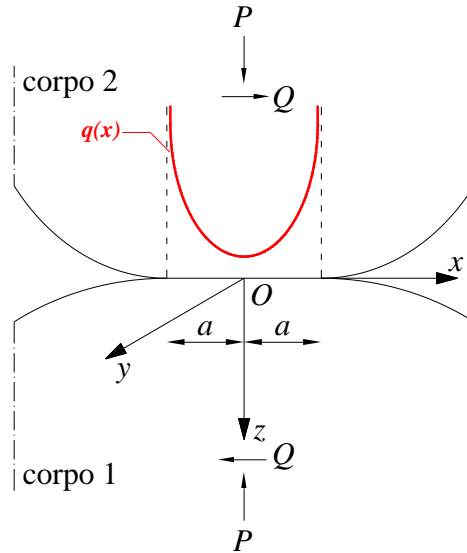


Figura 2.8 Contatto incipiente tra corpi cilindrici: carico tangenziale  $q(x)$  cui corrispondono spostamenti tangenziali costanti.

In particolare, si consideri la situazione di scorrimento parziale in cui la forza tangenziale,  $Q$ , viene incrementata fino a raggiungere il valore al limite dello slittamento, e pari a  $\mu P$ . La soluzione a tale problema fu inizialmente presentata da Cattaneo (Cattaneo, 1938) e, indipendentemente, da Mindlin (Mindlin, 1949). Il carico tangenziale distribuito che si genera all'interfaccia della superficie di contatto,  $q'(x)$ , può quindi essere espresso sulla base della teoria di Hertz come:

$$q'(x) = \mu p(x) = \frac{2\mu P}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (2.44)$$

In analogia con gli spostamenti normali prodotti da una distribuzione di tipo Hertziano, è possibile determinare gli spostamenti in direzione tangenziale dovuti al carico,  $q'(x)$ . In particolare, se non si ha scorrimento in  $x=0$ , è possibile dimostrare come:

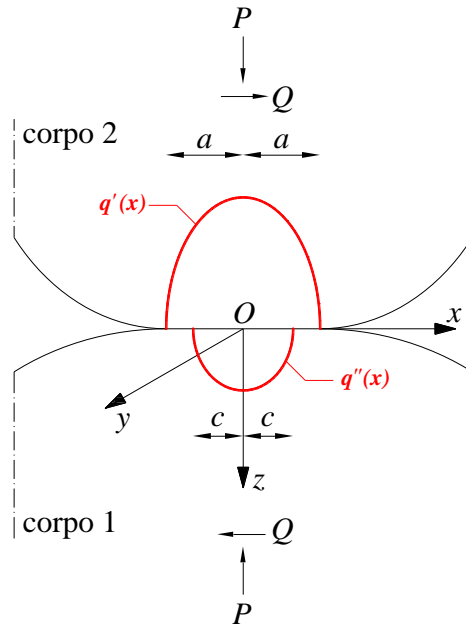
$$\bar{u}'_{x1} = \delta'_{x1} - \frac{(1 - \nu_1^2)\mu p_0 x^2}{a E_1} \quad (2.45a)$$

$$\bar{u}'_{x_2} = -\delta'_{x_2} + \frac{(1-\nu_2^2)\mu p_0 x^2}{a E_2} \quad (2.45b)$$

Si consideri ora un ulteriore contributo alla distribuzione tangenziale del carico,  $q''(x)$ , e pari a:

$$q''(x) = -\frac{c}{a} \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad (2.46)$$

agente sulla larghezza  $-c \leq x \leq c$ , come mostrato in *Figura 2.9*.



*Figura 2.9* Contatto incipiente tra corpi cilindrici: carichi tangenziali  $q'(x)$  e  $q''(x)$ .

Gli spostamenti in direzione tangenziale prodotti da tale distribuzione di carico ( $\bar{u}''_{x_1}$  e  $\bar{u}''_{x_2}$ ) risultano pari a:

$$\bar{u}''_{x_1} = -\delta''_{x_1} + \frac{c}{a} \frac{(1-\nu_1^2)\mu p_0 x^2}{c E_1} \quad (2.47a)$$



$$\bar{u}_{x2}'' = +\delta_{x2}'' - \frac{c}{a} \frac{(1-\nu_2^2)\mu p_0 x^2}{c E_2} \quad (2.47b)$$

Sovrapponendo gli effetti prodotti dalla distribuzione  $q'(x)$  a quelli della distribuzione  $q''(x)$ , è possibile determinare gli spostamenti tangenziali risultanti,  $\bar{u}_{x1}$  e  $\bar{u}_{x2}$ :

$$\bar{u}_{x1} = \bar{u}_{x1}' + \bar{u}_{x1}'' = \delta_{x1}' + \delta_{x1}'' = \delta_{x1} \quad (2.48a)$$

$$\bar{u}_{x2} = \bar{u}_{x2}' + \bar{u}_{x2}'' = -\delta_{x2}' - \delta_{x2}'' = -\delta_{x2} \quad (2.48b)$$

ossia gli spostamenti all'interno della regione  $-c \leq x \leq c$  risultano essere costanti. Sostituendo, infatti, le *Eqs.(2.48)* all'interno dell'*Eq.(2.38a)*, è immediato verificare che risulta soddisfatta la condizione di perfetta aderenza tra le due superfici. In particolare, all'interno di tale regione, la distribuzione risultante del carico tangenziale è pari a:

$$q(x) = q'(x) + q''(x) = \frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2} \right) \quad (2.49)$$

ed essendo, in generale,  $c < a$ ,  $q(x)$  risulta inferiore al limite dello slittamento  $\mu p(x)$ . Ciò implica che anche la seconda condizione necessaria per garantire perfetta aderenza tra i corpi, condizione rappresentata dall'*Eq.(2.40)*, risulta soddisfatta.

Relativamente alla restante regione della superficie di contatto, ossia  $c \leq |x| \leq a$ , la condizione rappresentata dall'*Eq.(2.41)*, affinché si abbia una regione di *slip*, risulta essere automaticamente soddisfatta, avendo determinato il carico  $q'(x)$  come riportato in *Eq.(2.44)*.

È necessario verificare che anche la seconda condizione, riportata in *Eq.(2.42)*, e relativa al verso degli scorrimenti, sia rispettata. Ciò richiede la conoscenza del campo di spostamenti indotto da una distribuzione ellittica di carico tangenziale. Tale campo di spostamenti,  $\bar{u}_{x1}$ , è stato valutato da Poritsky (Poritsky, 1950) ed è rappresentato qualitativamente in *Figura 2.10* (linea continua).

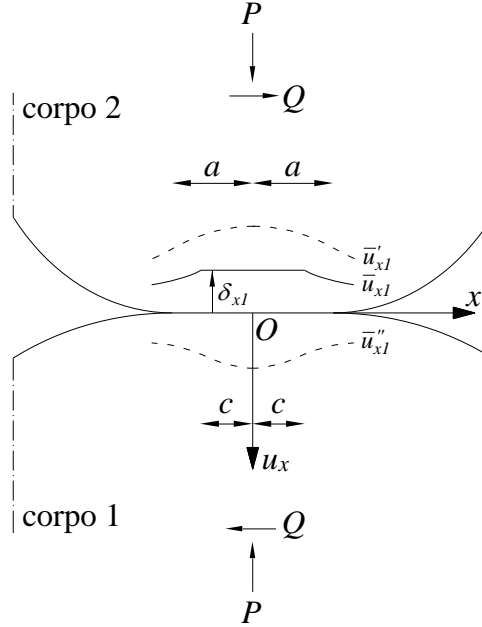


Figura 2.10 Andamento qualitativo del campo di spostamenti  $\bar{u}'_{x1}$ ,  $\bar{u}''_{x1}$  e  $\bar{u}_{x1}$ .

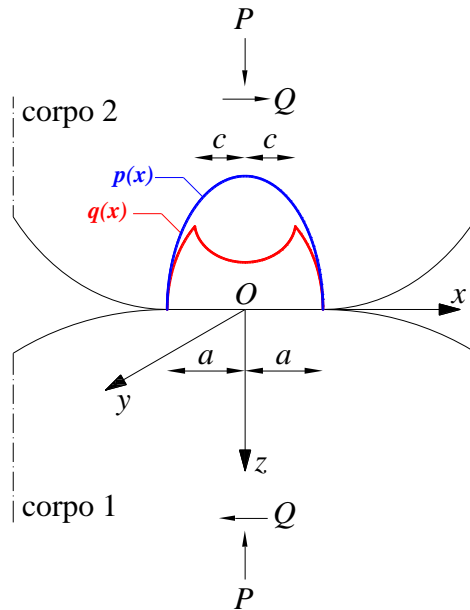
Impiegando l'Eq.(2.36) è possibile esprimere lo scorrimento assoluto tra due punti sulla superficie di contatto,  $s_x$ , come:

$$s_x = (\bar{u}'_{x1} - \bar{u}''_{x2}) - \delta_x \quad (2.50)$$

Osservando la Figura 2.10, risulta evidente come la quantità  $\bar{u}'_{x1}$  sia inferiore a  $\delta_{x1}$  in ogni punto della regione di slip. Analogamente, può essere dimostrato come anche la quantità  $\bar{u}''_{x2}$  sia inferiore a  $\delta_{x2}$ . È possibile quindi affermare, con riferimento alla Eq.(2.50), come lo scorrimento assoluto  $s_x$  sia negativo e, quindi, di verso opposto alla distribuzione tangenziale. È stato quindi dimostrato da Johnson (Johnson, 1985) come la seguente distribuzione di carico,  $q(x)$ :

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\mu P_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{per } c \leq |x| \leq a \\ \frac{\mu P_0}{a} (\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2}) & \text{per } |x| < c \end{cases} \quad (2.51)$$

illustrata qualitativamente in *Figura 2.11*, insieme alla distribuzione di carico normale,  $p(x)$ , rispetta le condizioni al contorno, sia all'interno ( $-c \leq x \leq c$ ) sia all'esterno ( $c \leq |x| \leq a$ ) della superficie di aderenza.



*Figura 2.11* Contatto incipiente tra corpi cilindrici: distribuzioni di carico normale,  $p(x)$ , e tangenziale,  $q(x)$ , agenti sulla superficie di contatto.

La dimensione della superficie di aderenza può essere determinata imponendo l'equilibrio delle forze tangenziali, ossia:

$$Q = \int_{-a}^a q(x) dx = \int_{-a}^a q'(x) dx + \int_{-c}^c q''(x) dx = \mu P - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \mu P \quad (2.52)$$

da cui si ottiene:

$$c = a \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu P}} \quad (2.53)$$

Risulta quindi evidente come, mantenendo il valore di  $P$  costante e aumentando progressivamente il valore di  $Q$ , la zona di *slip* si origina dai bordi della regione di

contatto e si propaga verso l'interno della superficie di contatto. Raggiunto il valore del carico  $Q$  corrispondente al limite dello slittamento ( $Q=\mu P$ ), la regione di *stick* si riduce a una linea ( $c=0$ ), e qualsiasi ulteriore incremento di tale carico comporta uno slittamento totale tra i corpi

La determinazione dello stato tensionale in presenza di un contatto cilindrico soggetto ad un carico tangenziale  $Q$  (Figura 2.11) può essere ottenuto sfruttando i risultati ottenuti da McEwen presentati alla Sezione 2.2.1, relativi al carico normale  $P$ . In particolare, come mostrato dalle Eqs.(2.44) e (2.46), vi è una proporzionalità diretta tra il carico normale distribuito  $p(x)$  e il carico tangenziale distribuito  $q(x)$ , attraverso il coefficiente di attrito  $\mu$ . È possibile pertanto, con opportuni accorgimenti matematici, esprimere le componenti del tensore degli sforzi dovute al carico tangenziale  $Q$  in funzione delle medesime componenti dovute al carico normale  $P$  (Johnson, 1985; Vantadori, 2017):

$$\sigma_{x,Q} = \begin{cases} \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left\{ - \left[ n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2|x| \right] + \left[ n_c \left( 2 - \frac{z^2 - m_c^2}{m_c^2 + n_c^2} \right) - 2|x| \right] \right\} \\ \text{per } x < 0 \\ \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left\{ \left[ n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2|x| \right] - \left[ n_c \left( 2 - \frac{z^2 - m_c^2}{m_c^2 + n_c^2} \right) - 2|x| \right] \right\} \\ \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.54a)$$

$$\sigma_{z,Q} = \begin{cases} \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) - n_c \left( \frac{m_c^2 - z^2}{m_c^2 + n_c^2} \right) \right] & \text{per } x < 0 \\ \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ -n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) + n_c \left( \frac{m_c^2 - z^2}{m_c^2 + n_c^2} \right) \right] & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.54b)$$

$$\tau_{xz,Q} = -\mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right] + \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ m_c \left( 1 + \frac{z^2 + n_c^2}{m_c^2 + n_c^2} \right) - 2z \right] \quad (2.54c)$$

dove:

$$m_c = \sqrt{\frac{I}{2} \left\{ \left[ (c^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right]^{0.5} + (c^2 - x^2 + z^2) \right\}} \quad (2.55a)$$

$$n_c = \sqrt{\frac{I}{2} \left\{ \left[ (c^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right]^{0.5} - (c^2 - x^2 + z^2) \right\}} \quad (2.55b)$$

Il tensore degli sforzi può, quindi, essere determinato sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui:

$$\sigma_x = \sigma_{x,P} + \sigma_{x,Q} \quad (2.56a)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z,P} + \sigma_{z,Q} \quad (2.56b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz,P} + \tau_{xz,Q} \quad (2.56c)$$

dove  $\sigma_{x,P}$ ,  $\sigma_{z,P}$  e  $\tau_{xz,P}$  rappresentano le componenti del tensore degli sforzi dovute al carico normale  $P$ , e determinate come riportato nelle *Eqs.(2.19)*.

### 2.3.2 Contatto sferico

Si considerino due corpi sferici posti in contatto da una forza normale  $P$  e soggetti ad un carico tangenziale  $Q_x$ , agente in direzione  $x$ , tale per cui  $Q_x \leq \mu P$  (*Figura 2.12*).

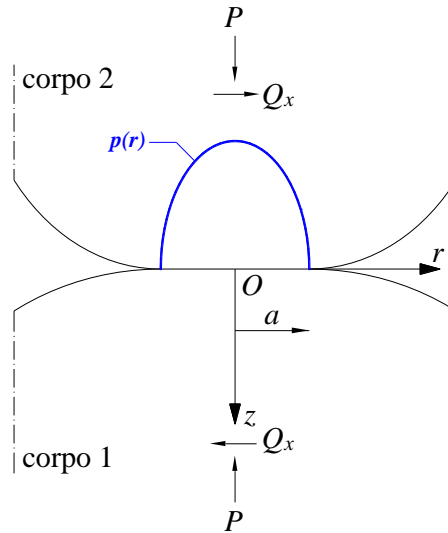


Figura 2.12 Contatto incipiente tra corpi sferici: geometria e distribuzione carico normale  $p(r)$ .

Il raggio della superficie di contatto di forma circolare,  $a$ , e la distribuzione del carico normale,  $p(r)$ , sono fornite dalla teoria di Hertz. Analogamente all'analisi presentata per il contatto cilindrico nella Sezione 2.3.1, si ipotizza inizialmente che il valore del coefficiente di attrito,  $\mu$ , sia sufficientemente elevato tale per cui si ha aderenza sull'intera superficie di contatto. Quindi, per  $r \leq a$ , gli spostamenti tangenziali sono costanti, e valgono le *Eqs.(2.38)*.

Dalla teoria del semi-spazio elastico, è possibile dimostrare come la distribuzione di carico tangenziale,  $q_x(r)$ , che produce un campo di spostamenti tangenziali costanti su una superficie circolare, è pari a (Johnson, 1985):

$$q_x(r) = \frac{Q_x}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (2.57)$$

Tale distribuzione di carico, qualitativamente analoga a quella rappresentata in *Figura 2.8* per contatto cilindrico, tende ad un valore infinito in corrispondenza della frontiera della superficie di contatto ( $r=\pm a$ ). Ciò implica che, affinché sia rispettata l'ipotesi iniziale di totale aderenza, il coefficiente di attrito dovrebbe tendere anch'esso ad un valore infinito. È lecito, quindi, assumere che possano nascere scorrimenti relativi in corrispondenza delle zone estreme del contatto.

Si consideri, quindi, la situazione in cui si ha scorrimento parziale tra i corpi, in cui il valore del carico tangenziale,  $Q_x$ , viene incrementato fino a raggiungere il valore al limite dello slittamento, pari a  $\mu P$ . Il carico tangenziale distribuito che si genera all'interfaccia della superficie di contatto,  $q'_x(r)$ , può quindi essere espresso, sulla base della teoria di Hertz:

$$q'_x(r) = \mu p(r) = \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (2.58)$$

in cui il valore di  $p_0$  per il contatto sferico è dato dall'*Eq.(2.31)*.

Analogamente agli spostamenti normali prodotti da una distribuzione di tipo Hertziano, è possibile determinare gli spostamenti in direzione tangenziale ( $\bar{u}'_x$  e  $\bar{u}'_y$ ) dovuti al carico  $q'_x(r)$ . In particolare, se non si ha scorrimento in  $x=0$ , è possibile dimostrare (Johnson, 1985) che:

$$\bar{u}'_x = \frac{\pi \mu p_0}{32Ga} [4(2-\nu)a^2 + (4-\nu)x^2 + (4-3\nu)y^2] \quad (2.59a)$$

$$\bar{u}'_y = \frac{\pi \mu p_0}{32Ga} 2\nu xy \quad (2.59b)$$

dove  $G$  rappresenta il modulo di elasticità tangenziale dei corpi posti a contatto, ipotizzati costituiti dal medesimo materiale.

Si consideri ora un ulteriore contributo alla distribuzione tangenziale del carico,  $q''_x(r)$ , pari a:

$$q''_x(r) = -\frac{c}{a} \mu p(r) = -\frac{c}{a} \mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c}\right)^2} \quad (2.60)$$

agente su una superficie circolare, concentrica alla superficie di contatto, di raggio  $c$ . Gli spostamenti in direzione tangenziale prodotti da tale distribuzione di carico ( $\bar{u}''_x$  e  $\bar{u}''_y$ ) risultano essere pari a:

$$\bar{u}''_x = -\frac{c}{a} \frac{\pi \mu p_0}{32Gc} [4(2-\nu)c^2 + (4-\nu)x^2 + (4-3\nu)y^2] \quad (2.61a)$$

$$\bar{u}''_y = -\frac{c}{a} \frac{\pi \mu p_0}{32Gc} 2\nu xy \quad (2.61b)$$

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, è quindi possibile ottenere il campo di spostamenti nella regione  $r \leq c$ :

$$\bar{u}_x = \frac{\pi \mu p_0}{8Ga} (2-\nu)(a^2 - c^2) \quad (2.62a)$$

$$\bar{u}_y = 0 \quad (2.62b)$$

Si osserva che le *Eqs.*(2.62) soddisfano le condizioni di perfetta aderenza (*Eq.*(2.38)) tra le due superfici poste a contatto. In particolare, all'interno della regione  $r \leq c$ , la distribuzione risultante del carico tangenziale è pari a:

$$q_x(r) = q'_x(r) + q''_x(r) = \frac{\mu p_0}{a} \left[ \sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{c^2 - r^2} \right] \quad (2.63)$$

la quale, valendo in generale  $c < a$ , risulta essere ovunque inferiore al limite dello slittamento  $\mu p(x)$ . La seconda condizione necessaria per garantire perfetta aderenza tra i corpi (Eq.(2.40)), risulta essere anch'essa soddisfatta.

Relativamente alla restante regione della superficie di contatto ( $c \leq r \leq a$ ), la condizione rappresentata dall'Eq.(2.41) risulta essere soddisfatta, avendo ottenuto il carico  $q'_x(r)$  come riportato in Eq.(2.58).

È possibile inoltre dimostrare (Johnson, 1955) come la distribuzione di carico tangenziale  $q''_x(r)$ , di cui all'Eq.(2.60) produce, nella regione di *slip* ( $c \leq r \leq a$ ), spostamenti tali per cui lo scorrimento assoluto tra due punti della superficie di contatto,  $s(x,y)$ , è opposto al verso del carico tangenziale. Ciò implica che la seconda condizione necessaria affinché si verifichi scorrimento tra i corpi (di cui all'Eq.(2.42)), risulta essere soddisfatta. È possibile, quindi, affermare che la distribuzione di carico,  $q_x(r)$ :

$$q_x(r) = \begin{cases} \frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - r^2} & \text{per } c \leq r \leq a \\ \frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{c^2 - r^2} \right) & \text{per } r < c \end{cases} \quad (2.64)$$

illustrata qualitativamente in *Figura 2.13*, insieme alla distribuzione di carico normale,  $p(r)$ , rispetta le condizioni al contorno sia all'interno ( $r \leq c$ ) sia all'esterno ( $c \leq r \leq a$ ) della superficie di aderenza.

La dimensione della superficie di aderenza può essere determinata imponendo l'equilibrio delle forze tangenziali, ossia:

$$Q_x = \int_0^a 2\pi q'_x(r) dr + \int_0^c 2\pi q''_x(r) dr = \mu P - \left( \frac{c}{a} \right)^3 \mu P \quad (2.65)$$

ottenendo:

$$c = a \sqrt[3]{1 - \frac{Q}{\mu P}} \quad (2.66)$$



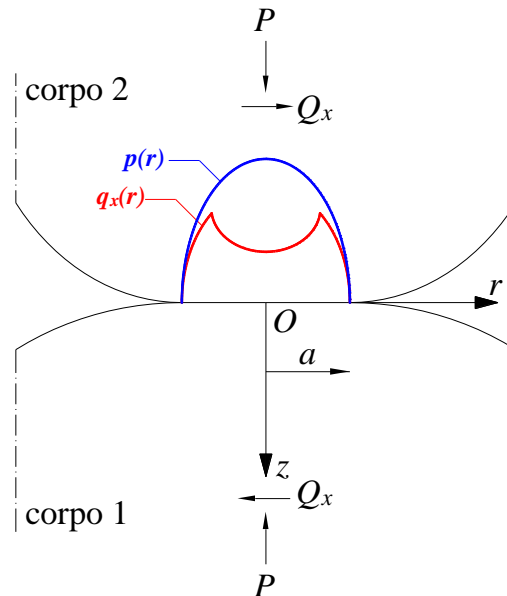


Figura 2.13 Contatto incipiente tra corpi sferici: distribuzioni di carico normale,  $p(r)$ , e tangenziale,  $q_x(r)$ , agenti sulla superficie di contatto..

Analogamente a quanto evidenziato per il contatto cilindrico, dall'Eq.(2.66) è possibile notare come, mantenendo costante il carico  $P$  e aumentando progressivamente  $Q_x$ , la regione di aderenza si riduca, fino a diventare un punto per valori di  $Q_x$  al limite dello slittamento ( $Q_x = \mu P$ ).

Lo stato tensionale in presenza di contatto sferico soggetto a un carico tangenziale,  $Q_x$  (Figura 2.12), può essere determinato sfruttando i risultati ottenuti da Hamilton (Hamilton, 1983). In particolare, l'Eq.(2.64) mostra come la distribuzione del carico tangenziale,  $q_x(r)$ , agente sulla superficie di contatto è equivalente alla sovrapposizione di due distribuzioni: una distribuzione agente su tutta la superficie di contatto,  $q'_x(r)$  (Eq.(2.58)), e una distribuzione agente sulla sola regione di stick,  $q''_x(r)$  (Eq.(2.60)). Per cui le componenti del tensore degli sforzi dovute alla presenza del carico normale,  $p(r)$ , e determinate alla Sezione 2.2.2, possono essere sommate a quelle dovute ai carichi tangenziali,  $q'_x(r)$  e

$q_x''(r)$ . È possibile quindi esprimere le componenti del tensore degli sforzi dovute a  $q_x'(r)$  come segue:

$$\begin{aligned} \sigma'_{x,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -x \left( \frac{\nu}{4} + 1 \right) \phi + \frac{axM}{r^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (S\nu - 2A\nu + z^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x^2 z^2}{S} + \frac{7\nu r^2}{4} - 2\nu x^2 + r^2 \right\} + \frac{xzN}{r^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left[ -\frac{S}{6}(1-2\nu) - \frac{A}{3}(1-2\nu) - \frac{1}{2}(z^2 + 3a^2) \right] + \frac{a^2 x^2}{S} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\nu r^2}{4} - \frac{7r^2}{4} \right\} + \frac{4a^3 xz}{3r^4} \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \end{aligned} \quad (2.67a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{y,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -\frac{3\nu x \phi}{4} + \frac{axM}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) [\nu(S - 2A + r^2) + z^2] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{y^2 z^2}{S} + \frac{3\nu r^2}{4} \right\} + \frac{zxN}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \left[ -\frac{S}{6}(1-2\nu) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{A}{3}(1-2\nu) - \frac{z^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \right] + \frac{a^2 y^2}{S} - \frac{3\nu r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right\} + \\ & \left. \left. + \frac{4a^3 zx}{r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \end{aligned} \quad (2.67b)$$

$$\sigma'_{z,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{zxN}{2r^2} \left\{ 1 - \frac{r^2 + z^2 + a^2}{S} \right\} \right] \quad (2.67c)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xy,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{y}{2} \left( \frac{\nu}{2} - 1 \right) \phi + \frac{ayM}{r^4} \left\{ \frac{x^2 z^2}{S} + \nu \left[ (S - 2A) \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 2x^2 + \frac{r^2}{4} \right] + \frac{r^2}{2} + z^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right\} + \frac{yzN}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left[ (2\nu - 1) \left( \frac{S}{6} + \frac{A}{3} \right) - \frac{z^2}{2} - \frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] + \frac{r^2 \nu}{4} + \frac{a^2 x^2}{S} - \frac{y^2}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3x^2}{2} \right\} + \frac{4a^3 yz}{3r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \end{aligned} \quad (2.67d)$$

$$\tau'_{yz,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \frac{xyz}{2r^4} \left\{ aM \left( \frac{1}{2} + \frac{z^2 - 3a^2 - r^2}{2S} \right) + \frac{zN}{2} \left( -3 + \frac{5a^2 + z^2 + r^2}{S} \right) \right\} \quad (2.67e)$$

$$\tau'_{xz,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{3z\phi}{2} + \frac{azM}{r^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^2}{S} \right\} + \frac{N}{r^2} \left\{ -\frac{3(S+2A)}{4} + z^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right\} \right] \quad (2.67f)$$

dove i parametri  $A$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\phi$ ,  $G$  ed  $H$  sono determinati attraverso le *Eqs.(2.33)*. Analogamente, le componenti del tensore degli sforzi dovute a  $q''_x(r)$  possono esprimersi come segue:

$$\sigma''_{x,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -x \left( \frac{\nu}{4} + 1 \right) \phi_c + \frac{cxM_c}{r^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (S_c \nu - 2A_c \nu + z^2) + \frac{x^2 z^2}{S_c} + \frac{7\nu r^2}{4} - 2\nu x^2 + r^2 \right\} + \frac{xzN_c}{r^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \left[ -\frac{S_c}{6} (1-2\nu) - \frac{A_c}{3} (1-2\nu) - \frac{1}{2} (z^2 + 3c^2) \right] + \frac{c^2 x^2}{S_c} - \frac{\nu r^2}{4} - \frac{7r^2}{4} \right\} + \frac{4c^3 xz}{3r^4} \left( \frac{3}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \quad (2.68a)$$

$$\sigma''_{y,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -\frac{3\nu x \phi_c}{4} + \frac{cxM_c}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) [\nu (S_c - 2A_c + r^2) + z^2] + \frac{y^2 z^2}{S_c} + \frac{3\nu r^2}{4} \right\} + \frac{zxN_c}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) \left[ -\frac{S_c}{6} (1-2\nu) + \frac{A_c}{3} (1-2\nu) - \frac{z^2}{2} - \frac{3c^2}{2} \right] + \frac{c^2 y^2}{S_c} - \frac{3\nu r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right\} + \frac{4c^3 zx}{r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r^2} \right) (1-2\nu) \right] \quad (2.68b)$$

$$\sigma''_{z,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{zxN_c}{2r^2} \left\{ 1 - \frac{r^2 + z^2 + c^2}{S_c} \right\} \right] \quad (2.68c)$$

$$\begin{aligned} \tau''_{xy,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{y}{2} \left( \frac{\nu}{2} - 1 \right) \phi_c + \frac{cyM_c}{r^4} \left\{ \frac{x^2z^2}{S_c} + \nu \left[ (S_c - 2A_c) \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 2x^2 + \frac{r^2}{4} \right] + \frac{r^2}{2} + z^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right\} + \frac{yzN_c}{r^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left[ (2\nu - 1) \left( \frac{S_c}{6} + \frac{A_c}{3} \right) - \frac{z^2}{2} - \frac{3c^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] + \frac{r^2\nu}{4} + \frac{c^2x^2}{S_c} - \frac{y^2}{2} + \right. \\ & \left. \left. - \frac{3x^2}{2} \right\} + \frac{4c^3yz}{3r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) (1 - 2\nu) \right] \quad (2.68d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau''_{yz,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \frac{xyz}{2r^4} \left\{ cM_c \left( \frac{1}{2} + \frac{z^2 - 3c^2 - r^2}{2S_c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{zN_c}{2} \left( -3 + \frac{5c^2 + z^2 + r^2}{S_c} \right) \right\} \quad (2.68e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau''_{zx,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{3z\phi_c}{2} + \frac{czM_c}{r^2} \left\{ 1 + \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^2}{S_c} \right\} + \frac{N_c}{r^2} \left\{ -\frac{3(S_c + 2A_c)}{4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + z^2 - \frac{3c^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right\} \right] \quad (2.68f) \end{aligned}$$

dove:

$$A_c = r^2 + z^2 - c^2 \quad (2.69a)$$

$$S_c = \sqrt{A_c^2 + 4c^2z^2} \quad (2.69b)$$

$$M_c = \sqrt{\frac{S_c + A_c}{2}} \quad (2.69c)$$

$$N_c = \sqrt{\frac{S_c - A_c}{2}} \quad (2.69d)$$

$$\phi_c = \tan^{-1}\left(\frac{c}{M_c}\right) \quad (2.69e)$$

Il tensore degli sforzi può, quindi, essere determinato sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_x = \sigma_{x,P} + \sigma'_{x,Q} + \sigma''_{x,Q} \quad (2.70a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y,P} + \sigma'_{y,Q} + \sigma''_{y,Q} \quad (2.70b)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z,P} + \sigma'_{z,Q} + \sigma''_{z,Q} \quad (2.70c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,P} + \tau'_{xy,Q} + \tau''_{xy,Q} \quad (2.70d)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz,P} + \tau'_{yz,Q} + \tau''_{yz,Q} \quad (2.70e)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zx,P} + \tau'_{zx,Q} + \tau''_{zx,Q} \quad (2.70f)$$

## 2.4 Carico tangenziale alla superficie di contatto in regime ciclico: parziale scorrimento

Nelle sezioni precedenti sono stati considerati carichi in regime statico, cioè con distribuzione nel tempo costante. Tuttavia, la fatica da contatto è caratterizzata da carichi tangenziali variabili ciclicamente tra due valori limite (chiamati nel seguito, rispettivamente,  $Q_{max}$  e  $Q_{min}$ ) e, di conseguenza, le distribuzioni di carico per contatto cilindrico (Eq.(2.51)) e per contatto sferico (Eq.(2.64)) valgono solo per gli istanti temporali in corrispondenza di tali valori limite. Risulta quindi di interesse l'analisi della distribuzione di carico tangenziale in un generico istante temporale ( $Q_{min} \leq Q(t) \leq Q_{max}$ ).

Si consideri la storia temporale del carico  $Q(t)$  riportata in *Figura 2.14*.

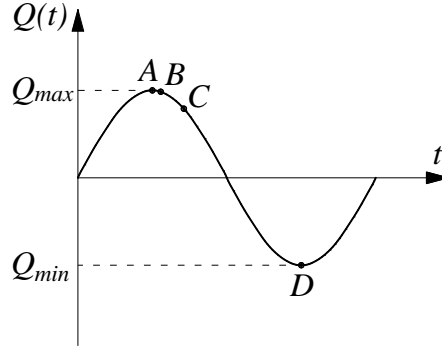


Figura 2.14 Storia temporale del carico tangenziale  $Q(t)$ .

I punti  $A$  e  $D$  corrispondono ai valori di  $Q_{max}$  e  $Q_{min}$ , rispettivamente. Una riduzione infinitesima del carico (punto  $B$ , Figura 2.14) comporta che la variazione degli spostamenti  $u_1$  e  $u_2$ , nel tempo, sia di segno opposto rispetto agli istanti temporali in cui il carico tangenziale risulta essere crescente, ossia:

$$\frac{\left(\frac{\partial [u_1(t) - u_2(t)]}{\partial t}\right)_{t=B}}{\left|\left(\frac{\partial [u_1(t) - u_2(t)]}{\partial t}\right)_{t=B}\right|} = - \frac{\left(\frac{\partial [u_1(t) - u_2(t)]}{\partial t}\right)_{t=A}}{\left|\left(\frac{\partial [u_1(t) - u_2(t)]}{\partial t}\right)_{t=A}\right|} \quad (2.71)$$

Ciò implica che l'Eq.(2.41) non risulta più essere soddisfatta, e nasce una perfetta adesione su tutta la superficie di contatto. Un'ulteriore riduzione del carico tangenziale  $Q$  (da  $B$  a  $C$  in Figura 2.14) comporta la nascita di uno scorrimento inverso (*reverse slip*) agli estremi della superficie di contatto ( $c \leq |x| \leq a$ ). In tale zona, affinché sia rispettata l'Eq.(2.42), le distribuzioni di carico tangenziale riportate nelle Eq.(2.51) e Eq.(2.64) devono cambiare segno, e ciò implica la nascita di spostamenti relativi in tutta la superficie di contatto (Hills, 1994).

#### 2.4.1 Contatto cilindrico

Si considerino due corpi cilindrici, caratterizzati da assi longitudinali paralleli, posti in contatto da una forza normale,  $P$ , e soggetti ad un carico tangenziale,  $Q(t)$ , variabile ciclicamente secondo la storia temporale rappresentata in Figura 2.14, (Figura 2.15).

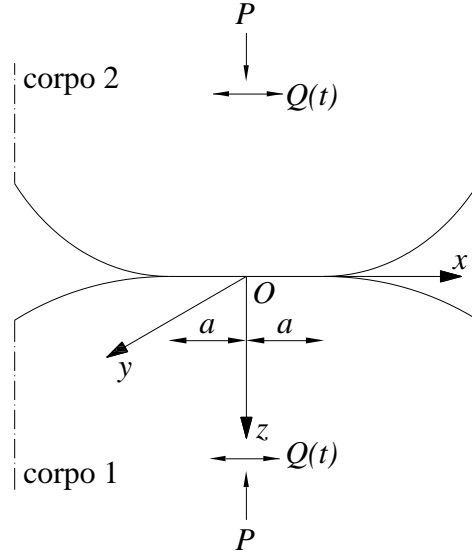


Figura 2.15 Contatto tra corpi cilindrici soggetti a una forza tangenziale ciclica,  $Q(t)$ .

Rispetto alla distribuzione di carico riportata nell'Eq.(2.51), è possibile dimostrare (Johnson, 1985) come una distribuzione di carico tangenziale aggiuntiva,  $q'''(x, t)$ , debba essere considerata al fine di rispettare le condizioni al contorno del problema:

$$q'''(x, t) = \frac{c'(t)}{a} 2\mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'(t)}\right)^2} \quad (2.72)$$

in cui  $c'(t)$  rappresenta la semi-larghezza istantanea della regione di stick. È possibile, quindi, riscrivere le Eqs.(2.51) per un generico istante temporale come:

$$q(x, t) = \begin{cases} -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{per } c'(t) \leq |x| \leq a \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - x^2} \right) & \text{per } c \leq |x| \leq c'(t) \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} \right) & \text{per } |x| \leq c \end{cases} \quad (2.73)$$

la cui distribuzione qualitativa è riportata in Figura 2.16.

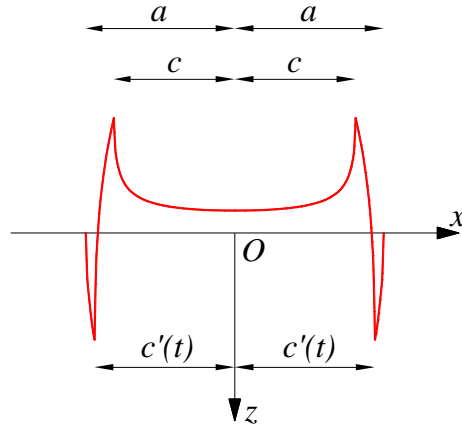


Figura 2.16 Distribuzione qualitativa del carico tangenziale  $q(x,t)$  in presenza di forza tangenziale ciclica  $Q(t)$  applicata ai corpi posti a contatto.

Il valore di  $c'(t)$  può essere determinato imponendo l'equilibrio delle forze tangenziali, analogamente a quanto mostrato nell'Eq.(2.52):

$$Q(t) = \int_{-a}^a q(x) dx = \int_{-a}^c q'(x) dx + \int_{-c}^c q''(x) dx + \int_{-c'(t)}^{c'(t)} q'''(x,t) dx \quad (2.74)$$

ottenendo:

$$c'(t) = a \sqrt{1 - \frac{Q_{max} - Q(t)}{2\mu P}} \quad (2.75)$$

Generalmente la fatica da contatto si verifica in presenza di un carico ciclico (o di una tensione ciclica) prodotta da una causa esterna e applicata ad uno solo dei due corpi. A titolo di esempio, nei dischi delle turbine, la forza centrifuga che nasce durante l'esercizio, si aggiunge ai carichi derivanti dal vincolo tra le lame e il mozzo rotante, che rappresentano i corpi posti a contatto.

Si considerino, quindi, due corpi cilindrici caratterizzati da assi longitudinali paralleli, posti in contatto da una forza normale,  $P$ , ed entrambi soggetti ad un carico tangenziale,  $Q(t)$ , variabile ciclicamente secondo la storia temporale di Figura 2.14. Si consideri, inoltre, la presenza di una tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ , in fase con  $Q(t)$ , applicata ad uno solo dei due corpi, come mostrato in Figura 2.17.



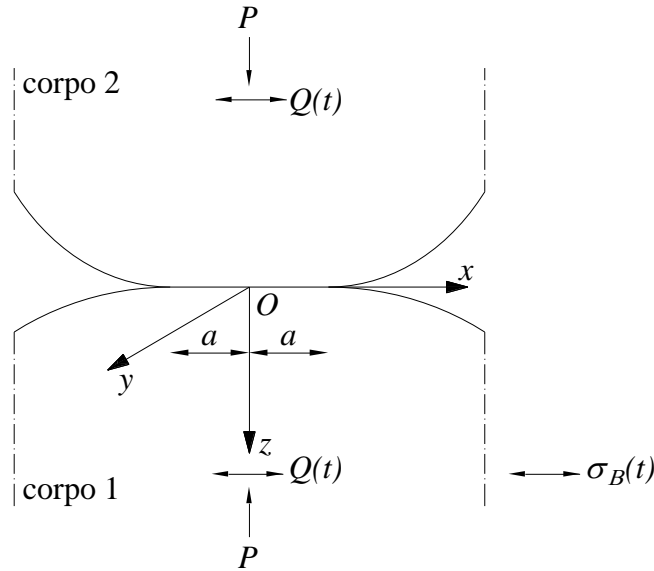


Figura 2.17 Contatto tra corpi cilindrici soggetti a carico tangenziale ciclico,  $Q(t)$ , e tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ .

In accordo con l'ipotesi iniziale di validità della teoria elastica lineare, il campo tensionale prodotto dalla tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , può essere determinato sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti. Tuttavia, la presenza della tensione ciclica solo nel corpo 1 produce una deformazione che non è presente nel corpo 2 e, conseguentemente, si ha una mancata corrispondenza nel campo deformativo in corrispondenza della superficie di contatto dei due corpi.

Hills e collaboratori (Hills 1993; Hills, 1994) dimostrarono come la presenza di una tensione ciclica di ampiezza  $\sigma_{B,a}$  applicata ad uno solo dei due corpi, produca una traslazione della regione di stick verso il fronte del contatto. Tale traslazione viene definita nel seguito con il termine eccentricità,  $e$ . È possibile dimostrare che  $e$  è pari a:

$$e = \frac{\sigma_{B,a} a}{4\mu p_0} \quad (2.76)$$

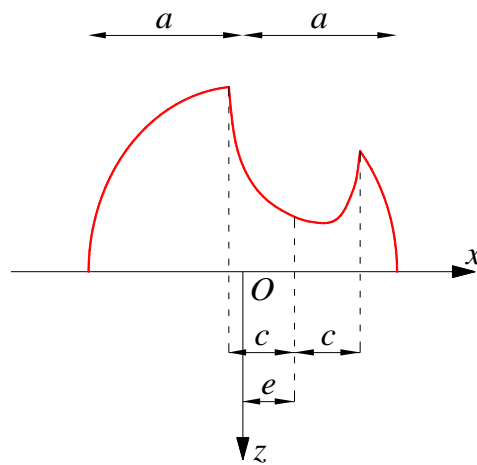
Tale espressione risulta valida solo in regime di scorrimento parziale o, equivalentemente, per valori contenuti dell'ampiezza tensione ciclica,  $\sigma_{B,a}$ , e in particolare:

$$\sigma_B \leq 4\mu p_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu P}} \right) \quad (2.77)$$

È possibile quindi riscrivere le Eqs.(2.51) e (2.73): più precisamente, negli istanti in cui il carico tangenziale raggiunge il valore massimo e minimo, rispettivamente, vale:

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{per } -a \leq x < -c + e \\ \frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - (x - e)^2} \right) & \text{per } -c + e \leq x \leq c + e \\ \frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{per } c + e \leq x \leq a \end{cases} \quad (2.78)$$

la cui distribuzione qualitativa è riportata in *Figura 2.18*.



*Figura 2.18* Distribuzione qualitativa del carico tangenziale  $q(x)$  in presenza di forza tangenziale ciclica  $Q(t)$  e tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , in corrispondenza dell'istante di massimo.

In un generico istante temporale, invece, la distribuzione del carico tangenziale  $q(x,t)$  può essere scritta come segue:

$$q(x,t) = \begin{cases} -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{per } -a \leq x < -c'(t) + e'(t) \\ \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - (x - e'(t))^2} \right) \\ \text{per } -c'(t) + e'(t) \leq x < -c + e \\ \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - (x - e'(t))^2} + \sqrt{c^2 - (x - e)^2} \right) \\ \text{per } -c + e \leq x \leq c + e \\ \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - (x - e'(t))^2} \right) \\ \text{per } c + e < x \leq c'(t) + e'(t) \\ \\ -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{per } c'(t) + e'(t) < x \leq a \end{cases} \quad (2.79)$$

in cui  $e'(t)$  rappresenta l'eccentricità istantanea della regione di stick, pari a:

$$e'(t) = \frac{(\sigma_{B,max} - \sigma_B(t))a}{8\mu p_0} \quad (2.80)$$

La distribuzione qualitativa del carico tangenziale,  $q(x,t)$ , in un generico istante temporale è mostrata in *Figura 2.19*.

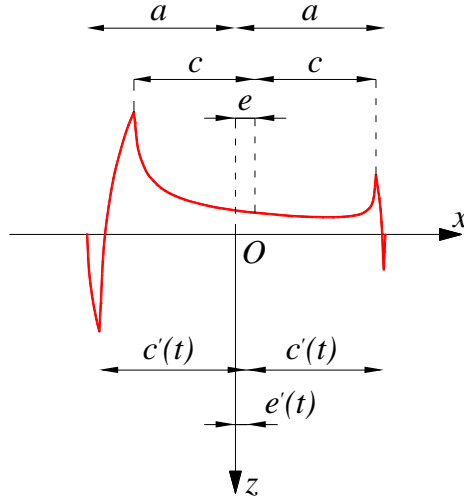


Figura 2.19 Distribuzione qualitativa del carico tangenziale  $q(x,t)$  in presenza di forza tangenziale ciclica  $Q(t)$  e tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , in un generico istante temporale.

Analogamente a quanto mostrato nella Sezione 2.3.1, la determinazione dello stato tensionale in presenza di un contatto cilindrico soggetto ad un carico tangenziale,  $Q(t)$ , variabile ciclicamente (Figura 2.14) può essere ottenuto sfruttando i risultati ottenuti da McEwen (McEwen, 1949) presentati alla Sezione 2.2.1. In particolare, le componenti del tensore degli sforzi in corrispondenza dell'istante temporale in cui  $Q(t)$  raggiunge il valore massimo possono esprimersi come segue:

$$\sigma_{x,Q} = \begin{cases} \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left\{ - \left[ n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2|x| \right] + \right. \\ \left. + \left[ n_e \left( 2 - \frac{z^2 - m_e^2}{m_e^2 + n_e^2} \right) - 2|x - e| \right] \right\} & \text{per } x < 0 \\ \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left\{ \left[ n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2|x| \right] + \right. \\ \left. - \left[ n_e \left( 2 - \frac{z^2 - m_e^2}{m_e^2 + n_e^2} \right) - 2|x - e| \right] \right\} & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.81a)$$

$$\sigma_{z,Q} = \begin{cases} \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) - n_e \left( \frac{m_e^2 - z^2}{m_e^2 + n_e^2} \right) \right] & \text{per } x < 0 \\ \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ -n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) + n_e \left( \frac{m_e^2 - z^2}{m_e^2 + n_e^2} \right) \right] & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.81b)$$

$$\tau_{xz,Q} = -\mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right] + \mu \frac{2P}{\pi a^2} \left[ m_e \left( 1 + \frac{z^2 + n_e^2}{m_e^2 + n_e^2} \right) - 2z \right] \quad (2.81c)$$

dove:

$$m_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( c^2 - (x-e)^2 + z^2 \right)^2 + 4(x-e)^2 z^2 \right]^{0.5} + \left( c^2 - (x-e)^2 + z^2 \right) \right\}} \quad (2.82a)$$

$$n_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( c^2 - (x-e)^2 + z^2 \right)^2 + 4(x-e)^2 z^2 \right]^{0.5} - \left( c^2 - (x-e)^2 + z^2 \right) \right\}} \quad (2.82b)$$

Il tensore degli sforzi può, quindi, essere determinato sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui:

$$\sigma_x = \sigma_{x,P} + \sigma_{x,Q} + \sigma_B \quad (2.83a)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z,P} + \sigma_{z,Q} \quad (2.83b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz,P} + \tau_{xz,Q} \quad (2.83c)$$

dove le componenti del tensore degli sforzi dovute al carico normale  $P$ ,  $\sigma_{x,P}$ ,  $\sigma_{z,P}$  e  $\tau_{xz,P}$ , sono state determinate attraverso le *Eqs.*(2.19).

La determinazione dello stato tensionale può, inoltre, essere ottenuta in forma chiusa, e valida per qualsiasi istante temporale. In particolare, si consideri un semi-spazio elastico soggetto ad una distribuzione generica di carico normale,  $p(x)$ , e carico tangenziale,  $q(x,t)$ , come mostrato in *Figura 2.20*.

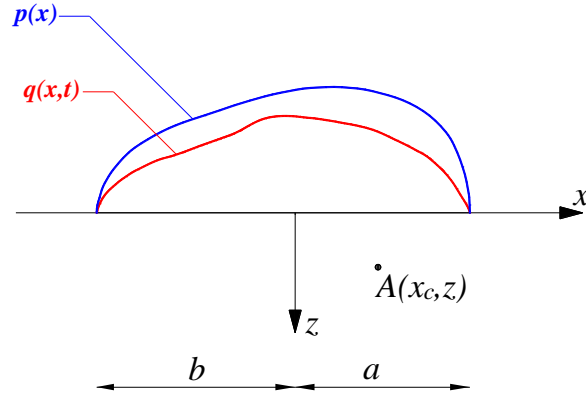


Figura 2.20 Distribuzione generica di carico normale,  $p(x)$ , e carico tangenziale,  $q(x,t)$

Lo stato tensionale in un generico punto  $A$  di coordinate  $(x_c, z)$  è ottenibile per integrazione della soluzione per carichi concentrati, ottenuta da Flamant (Flamant, 1892). In particolare, le componenti del tensore degli sforzi possono scriversi come:

$$\sigma_x(x_c, z, t) = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(x)(x_c - x)^2}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(x,t)(x_c - x)^3}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx \quad (2.84a)$$

$$\sigma_z(x_c, z, t) = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(x)}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(x,t)(x_c - x)}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx \quad (2.84b)$$

$$\tau_{xz}(x_c, z, t) = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(x)(x_c - x)}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx - \frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(x,t)(x_c - x)^2}{[(x_c - x)^2 + z^2]^2} dx \quad (2.84c)$$

#### 2.4.2 Contatto sferico

Si considerino due corpi sferici posti in contatto da una forza normale,  $P$ , e soggetti ad un carico tangenziale,  $Q_x(t)$ , variabile ciclicamente, come riportato in *Figura 2.21*.

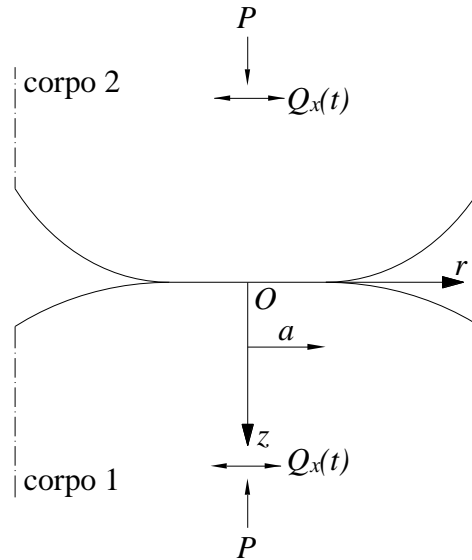


Figura 2.21 Contatto tra corpi sferici soggetti a una forza tangenziale ciclica,  $Q_x(t)$ .

Come osservato nella Sezione 2.4.1 per il contatto cilindrico, una riduzione progressiva del carico tangenziale dal suo valore massimo (punto A, Figura 2.14) comporta inizialmente la nascita di adesione totale sulla superficie di contatto, e successivamente uno scorrimento inverso agli estremi di tale superficie ( $c \leq r \leq c'$ ). Quindi, affinché sia rispettata l'Eq.(2.42) è necessario che la distribuzione del carico tangenziale cambi di segno.

Applicando la tecnica proposta da Cattaneo (Cattaneo, 1938) è possibile dimostrare che occorre considerare un'ulteriore distribuzione tangenziale,  $q_x'''(r,t)$ , rispetto a quella riportata nell'Eq.(2.64), affinché siano rispettate le condizioni al contorno del problema, e in particolare:

$$q_x'''(r,t) = \frac{c'(t)}{a} 2\mu p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'(t)}\right)^2} \quad (2.85)$$

in cui la semi-larghezza istantanea della regione di stick,  $c'(t)$ , può essere determinata imponendo l'equilibrio delle forze tangenziali:

$$Q_x(t) = \int_0^a 2\pi q_x'(r) dr + \int_0^c 2\pi q_x''(r) dr + \int_0^{c'(t)} 2\pi q_x'''(r,t) dr \quad (2.86)$$

ottenendo:

$$c'(t) = a \sqrt[3]{1 - \frac{Q_{max} - Q(t)}{2\mu P}} \quad (2.87)$$

Le Eqs.(2.64) possono quindi essere riscritte per un generico istante temporale:

$$q_x(r,t) = \begin{cases} -\frac{\mu p_0}{a} \sqrt{a^2 - r^2} & \text{per } c'(t) \leq r \leq a \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - r^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - r^2} \right) & \text{per } c \leq r \leq c'(t) \\ -\frac{\mu p_0}{a} \left( \sqrt{a^2 - r^2} - 2\sqrt{c'(t)^2 - r^2} + \sqrt{c^2 - r^2} \right) & \text{per } r \leq c \end{cases} \quad (2.88)$$

In presenza di un carico ciclico (o di una tensione ciclica) applicato a uno solo dei due componenti, situazione tipica della fatica da contatto, è stata osservata la nascita di un'eccentricità,  $e$ , della regione di *stick*. Si consideri, in particolare, la configurazione geometrica di *Figura 2.22*, composta da due corpi sferici posti in contatto da una forza normale,  $P$ , ed entrambi soggetti ad un carico tangenziale,  $Q_x(t)$ , variabile ciclicamente secondo la storia temporale di *Figura 2.14*. Si consideri inoltre la presenza di una tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , di ampiezza pari a  $\sigma_{B,a}$  e in fase con  $Q_x(t)$ , applicata ad uno solo dei due corpi.

L'eccentricità della regione di *stick*,  $e$ , dovuta alla presenza della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$  di ampiezza  $\sigma_{B,a}$ , è pari a (Wittkowski, 2000):

$$e \cong \frac{1-\nu}{4-3\nu} \frac{4\sigma_{B,a} a}{\pi \mu p_0} \quad (2.89)$$

La determinazione dello stato tensionale in presenza di contatto sferico soggetto alla presenza di un carico tangenziale,  $Q_x(t)$ , e a una tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ , applicata a uno dei due corpi può essere ottenuta, per l'istante in cui tali carichi raggiungono il valore massimo, sfruttando i risultati ottenuti da Hamilton (Hamilton, 1983).



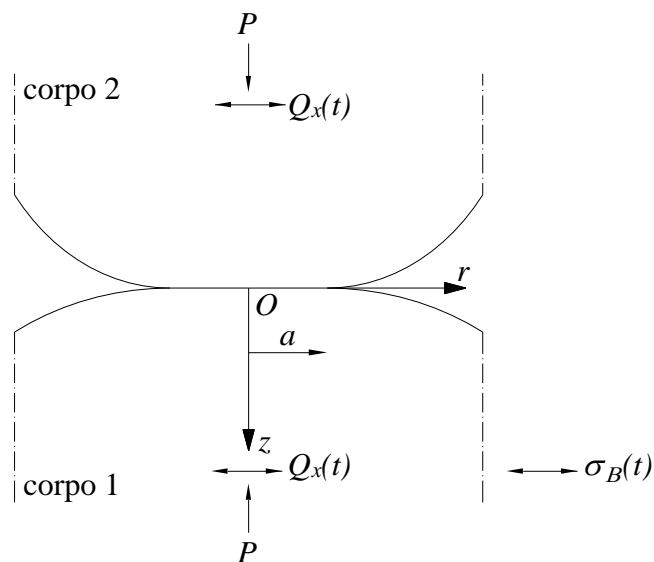


Figura 2.22 Contatto tra corpi sferici soggetti a carico tangenziale ciclico,  $Q_x(t)$ , e tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ .

Analogamente a quanto mostrato nella Sezione 2.3.2, può essere impiegato il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, le componenti del tensore degli sforzi dovute alla presenza della distribuzione del carico normale,  $p(r)$ , riportate nelle Eqs.(2.32), possono essere sommate a quelle dovute alle distribuzioni tangenziali  $q'_x(r)$  e  $q''_x(r)$ . Le componenti del tensore dovute a  $q'_x(r)$  sono calcolate attraverso le Eqs.(2.67), mentre quelle dovute al carico  $q''_x(r)$ , considerata l'eccentricità,  $e$ , possono essere espresse come segue:

$$\begin{aligned}
\sigma''_{x,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -x_e \left( \frac{\nu}{4} + 1 \right) \phi_e + \frac{cx_e M_e}{r_e^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) (S_e \nu - 2A_e \nu + z^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{x_e^2 z^2}{S_e} + \frac{7\nu r_e^2}{4} - 2\nu x_e^2 + r_e^2 \right\} + \frac{x_e z N_e}{r_e^4} \left\{ \left( \frac{3}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) \left[ -\frac{S_e}{6} (1 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\nu) - \frac{A_e}{3} (1 - 2\nu) - \frac{1}{2} (z^2 + 3c^2) \right] + \frac{c^2 x_e^2}{S_e} - \frac{\nu r_e^2}{4} - \frac{7r_e^2}{4} \right\} + \\
& \left. \left. + \frac{4c^3 x_e z}{3r_e^4} \left( \frac{3}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) (1 - 2\nu) \right] \right. \tag{2.90a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma''_{y,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ -\frac{3\nu x_e \phi_e}{4} + \frac{cx_e M_e}{r_e^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r_e^2} \right) [\nu (S_e - 2A_e + r_e^2) + z^2] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{y^2 z^2}{S_e} + \frac{3\nu r_e^2}{4} \right\} + \frac{zx_e N_e}{r_e^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r_e^2} \right) \left[ -\frac{S_e}{6} (1 - 2\nu) + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{A_e}{3} (1 - 2\nu) - \frac{z^2}{2} - \frac{3c^2}{2} \right] + \frac{c^2 y^2}{S_e} - \frac{3\nu r_e^2}{4} - \frac{r_e^2}{4} \right\} + \\
& \left. \left. + \frac{4c^3 z x_e}{r_e^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{r_e^2} \right) (1 - 2\nu) \right] \right. \tag{2.90b}
\end{aligned}$$

$$\sigma''_{z,Q} = \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{zx_e N_e}{2r_e^2} \left\{ 1 - \frac{r_e^2 + z^2 + c^2}{S_e} \right\} \right] \tag{2.90c}$$

$$\begin{aligned}
 \tau''_{xy,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{y}{2} \left( \frac{\nu}{2} - 1 \right) \phi_e + \frac{c y M_e}{r_e^4} \left\{ \frac{x_e^2 z^2}{S_e} + \nu \left[ (S_e - 2A_e) \left( \frac{1}{2} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) - 2x_e^2 + \frac{r_e^2}{4} \right] + \frac{r_e^2}{2} + z^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) \right\} + \\
 & + \frac{y z N_e}{r_e^4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) \left[ (2\nu - 1) \left( \frac{S_e}{6} + \frac{A_e}{3} \right) - \frac{z^2}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3c^2}{2} - \frac{r_e^2}{2} \right] + \frac{r_e^2 \nu}{4} + \frac{c^2 x_e^2}{S_e} - \frac{y^2}{2} - \frac{3x_e^2}{2} \right\} + \\
 & \left. + \frac{4c^3 y z}{3r_e^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) (1 - 2\nu) \right] \quad (2.90d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau''_{yz,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \frac{x_e y z}{2r_e^4} \left[ c M_e \left( \frac{1}{2} + \frac{z^2 - 3c^2 - r_e^2}{2S_e} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{z N_e}{2} \left( -3 + \frac{5c^2 + z^2 + r_e^2}{S_e} \right) \right] \quad (2.90e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau''_{zx,Q} = & \frac{3\mu P}{2\pi a^3} \left[ \frac{3z \phi_e}{2} + \frac{c z M_e}{r_e^2} \left\{ 1 + \frac{x_e^2}{r_e^2} - \frac{x_e^2}{S_e} \right\} + \frac{N_e}{r_e^2} \left\{ -\frac{3(S_e + 2A_e)}{4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + z^2 - \frac{3c^2}{4} - \frac{r_e^2}{4} + \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_e^2}{r_e^2} \right) \right\} \right] \quad (2.90f)
 \end{aligned}$$

considerando:

$$x_e = x - e \quad (2.91a)$$

$$r_e = \sqrt{(x - e)^2 - y^2} \quad (2.91b)$$

dove:

$$A_e = r_e^2 + z^2 - c^2 \quad (2.92a)$$

$$S_e = \sqrt{A_e^2 + 4c^2 z^2} \quad (2.92b)$$

$$M_e = \sqrt{\frac{S_e + A_e}{2}} \quad (2.92c)$$

$$N_e = \sqrt{\frac{S_e - A_e}{2}} \quad (2.92d)$$

$$\phi_e = \tan^{-1}\left(\frac{c}{M_e}\right) \quad (2.92e)$$

Le componenti del tensore degli sforzi risultano quindi pari a:

$$\sigma_x = \sigma_{x,P} + \sigma'_{x,Q} + \sigma''_{x,Q} + \sigma_B \quad (2.93a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y,P} + \sigma'_{y,Q} + \sigma''_{y,Q} \quad (2.93b)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z,P} + \sigma'_{z,Q} + \sigma''_{z,Q} \quad (2.93c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,P} + \sigma'_{x,Q} + \tau'_{xy,Q} + \tau''_{xy,Q} \quad (2.93d)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz,P} + \tau'_{yz,Q} + \tau''_{yz,Q} \quad (2.93e)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zx,P} + \tau'_{zx,Q} + \tau''_{zx,Q} \quad (2.93f)$$

## 2.5 Conclusioni

Nel presente Capitolo è stato analizzato lo stato tensionale di due corpi posti a contatto, con particolare riferimento a contatti tra corpi cilindrici e contatti tra corpi sferici.

Inizialmente è stata presentata la teoria di Hertz, che permette la determinazione della forma e della dimensione della superficie di contatto, oltre che la distribuzione dei carichi normali agenti su tale superficie.

Successivamente è stata considerata la presenza, tra i due corpi posti a contatto, di una forza tangenziale statica di valore inferiore al limite dello slittamento, ossia in regime di scorrimento parziale. Impiegando i risultati di Cattaneo e Mindlin è stato mostrato come la superficie di contatto risulti essere, in tale regime, caratterizzata da due zone: una zona di scorrimento (*slip*) e una zona di aderenza (*stick*) tra i corpi.

Infine, è stata considerato il caso di carichi tangenziali ciclici applicati ai corpi, e del relativo scorrimento inverso (*reverse slip*) che nasce agli estremi della zona di contatto. È stata considerata anche la configurazione geometrica caratterizzata dalla presenza di una tensione ciclica applicata ad uno solo dei due corpi. Tale configurazione rappresenta la schematizzazione delle più comuni prove sperimentali nello studio della fatica da contatto.

Vengono, quindi, fornite le espressioni analitiche, in forma approssimata e in forma chiusa, del campo tensionale nei corpi, sia per l'istante in cui i carichi ciclici raggiungono il loro massimo, che per un generico istante temporale.

Le componenti del tensore degli sforzi così ottenute rappresentano i dati di input per l'analisi a fatica, che verrà condotta impiegando il criterio di fatica multiassiale presentato nel successivo Capitolo.

## 2.6 Bibliografia

- Araújo J.A., Bellecave J., Castro F.C., Mériaux J., Pommier S. (2015) Equivalent configurations for notch and fretting fatigue. *Frattura ed Integrità Strutturale* 33, 427-433.
- Boussinesq J. (1885) *Application des Potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, Paris.
- Bufler H. (1959) Zur Theorie der rollenden Reibung. *Ingenieur Archiv* 27, 137-152.
- Cattaneo C. (1938) Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei* 27, 342-348.
- Flamant A. (1892) Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 114, 1465-1468.
- Hamilton G.M. (1983) Explicit equations for the stresses beneath a sliding spherical contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 197, 53-59.
- Hertz H. (1896) *Miscellaneous paper by Heinrich Hertz*. Macmillan & Co., New York.
- Hills D.A., Nowell D. (1994) *Mechanics of Fretting Fatigue*. Kluwer Academic Publishers, Londra.
- Hills D.A., Nowell D., Sackfield A. (1993) *Mechanics of Elastic Contacts*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Johnson K.L. (1955) Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. *Proceedings of the royal society, Part A: Mathematical and Physical Sciences* 230, 531-548.
- Johnson K.L. (1985) *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Madge J.J., Leen S.B., Shipway P.H. (2007) The critical role of fretting wear in the analysis of fretting fatigue. *Wear* 263, 542-551.
- McEwen E. (1949) Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix. *Philosophical Magazine* 40, 454-463.
- Mindlin R.D. (1949) Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics* 16, 259-268.

- 
- Poritsky H. (1950) Stresses and deflections of Cylindrical bodies in contact. *ASME Journal of Applied Mechanics* 17, 191-201.
- Vantadori S., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2017) A stress gradient approach for fretting fatigue assessment of metallic structural components. *International Journal of Fatigue* 101, 1-8.
- Wittkowsky B.U., Birch P.R., Domínguez J., Suresh S. (2000) An experimental investigation of fretting fatigue with spherical contact in 7075-T6 aluminum alloy. In: Hoepfner D.W. Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. *Fretting fatigue: current technology and practices*. ASTM STP 1367, Philadelphia, 213-227.





**ANALISI DEL COMPORTAMENTO A FATICA DA  
CONTATTO DI MATERIALI METALLICI**

---

**ANALYSIS OF FRETTING FATIGUE BEHAVIOUR  
IN METALLIC MATERIALS**

*The present Chapter deals with the analysis of the fatigue behaviour of metallic structural components under cyclic contact, which generates a multiaxial stress field in the body. In particular, in order to study such an issue, the criterion proposed by Carpinteri et al. (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a; Araújo, 2014; Carpinteri, 2015) is outlined. Such a criterion was originally formulated to evaluate the plain fatigue life of metallic structural components under multiaxial cyclic loadings, proportional and non-proportional. In the present Ph.D. Thesis, the criterion of Carpinteri et al. is extended with respect to its original formulation, in order to be applied to fretting fatigue.*

*As a matter of fact, fretting fatigue is characterised by stress concentrations near the contact surface of the bodies, for which the fatigue resistance of the structural component being examined may be reduced with respect to plain fatigue resistance by a factor ranging from 2 to 10 (Lindley, 1997). Therefore, the application of a generic multiaxial fatigue criterion at the most loaded point (Hot-spot) can lead to considerably underestimate the fatigue life of the analysed component (Nowell, 1988; Amargier, 2010; Amrouche, 2014). Nevertheless, it was observed (Nowell, 2006) as such stress concentrations are localised in a region very close to the contact surface, rapidly decreasing towards the inside of the component.*

*In such a context, in order to accurately estimate the fatigue life, several authors proposed the application of multiaxial fatigue criteria in conjunction with*

*non-local approaches, that is, approaches which are not based on a local maximum stress (Hot-spot stress).*

*For this reason, the state-of-the-art of the most common non-local approaches based on the critical distance concept is presented in this Chapter. The philosophy of such approaches consists in the definition of a representative material point (named critical point) at a certain distance (named critical distance) from the Hot-spot.*

*In particular, the Theory of the Critical Distance (TCD) proposed by Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007) is outlined, representing one of the most employed non-local approach during last decade. Such a Theory presents three forms: Point Method (PM), Line Method (LM), and Area Method (AM).*

*Then, the concept of variable critical distance depending on the number of loading cycles (Susmel, 2007; Susmel, 2009) is outlined, which allows us to take into account the increase of plastic zone size by decreasing the applied loading amplitude (Kouanga, 2018).*

*The concept of critical distance depending on the stress gradient, which is an empirical distance proposed by Fouvry and co-workers (Ferrè, 2013; Fouvry, 2014), is discussed. In particular, in accordance with the experimental campaigns performed, they observed that a constant value of the critical distance was not able to take into account the effect produced by high stress gradients, typical of fretting fatigue.*

*Finally, the Pluvinage Method (Pluvinage, 1999; Adib, 2003) is outlined. In such a method, the critical distance linked with the Fatigue Process Zone (FPZ) size is determined in a way similar to that used by the Theory of the Critical Distance, by also introducing a weight function in order to take into account the surface stress gradient and the elastic-plastic stresses inside the FPZ.*

### **3.1 Introduzione**

Il presente Capitolo è dedicato all'analisi del comportamento a fatica di componenti strutturali metallici in presenza di contatto ciclico, che genera uno stato tensionale multiassiale all'interno della materia. In particolare, per studiare il problema viene illustrato il criterio di Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a; Araújo, 2014; Carpinteri, 2015),

originariamente proposto per la valutazione della vita a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a carichi ciclici multiassiali. Tale criterio permette la valutazione della vita a fatica di componenti strutturali soggetti a carichi ciclici di natura multiassiale, proporzionali e non-proporzionali. Nella presente Tesi di Dottorato, il criterio di Carpinteri e collaboratori viene esteso rispetto alla formulazione originale, per essere applicato al caso della fatica da contatto.

La fatica da contatto, infatti, è caratterizzata da concentrazioni tensionali in corrispondenza della superficie di interfaccia dei due corpi, per cui la resistenza a fatica del componente può ridursi di un fattore da 2 a 10 rispetto al caso di fatica pura (Lindley, 1997). Di conseguenza, l'applicazione di un generico criterio di fatica multiassiale nel punto più sollecitato (*Hot-spot*) può portare a sottostimare considerevolmente la vita a fatica del componente (Nowell, 1988; Amargier, 2010; Amrouche, 2014). Nonostante ciò, è stato osservato (Nowell, 2006) come tali concentrazioni tensionali tendano ad essere localizzate in una regione molto prossima alla superficie, diminuendo rapidamente verso la parte interna del componente strutturale.

In tale contesto, per permettere di stimare con adeguato grado di accuratezza la vita a fatica, diversi autori proposero l'applicazione di criteri di fatica multiassiale congiuntamente ad approcci non-locali, cioè approcci non basati su un valore tensionale locale massimo (tensione all'*Hot-spot*).

Per tale motivo, nel presente Capitolo viene presentato lo stato dell'arte dei più comuni approcci non-locali basati sul concetto della distanza critica. La filosofia di tali approcci prevede di individuare un punto rappresentativo del materiale (detto punto critico), posto ad una certa distanza (detta distanza critica) dall'*Hot-spot*.

In particolare, viene inizialmente illustrata la Teoria della Distanza Critica (TCD) proposta da Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007), la quale rappresenta uno degli approcci non-locali più utilizzati nell'ultimo decennio, nella forma del *Point Method* (PM), *Line Method* (LM) e *Area Method* (AM).

Successivamente viene presentato il concetto di distanza critica variabile in funzione del numero di cicli (Susmel, 2007; Susmel, 2009), che permette di tenere in considerazione l'aumento delle dimensioni della regione plastica del materiale al diminuire dell'ampiezza dei carichi applicati (Kouanga, 2018).

Viene inoltre introdotto il concetto di distanza critica variabile in funzione del gradiente tensionale, distanza empirica proposta da Fouvry e collaboratori (Ferrè, 2013; Fouvry, 2014). Più precisamente, dalle campagne sperimentali condotte, è stato osservato come un valore costante della distanza critica non è in grado di cogliere l'effetto di gradienti tensionali elevati, tipici della fatica da contatto.

Infine, viene presentato il metodo di Pluvinage (Pluvinage, 1999; Adib, 2003). Secondo tale metodo, la distanza critica, legata all'ampiezza della *Fatigue Process Zone* (FPZ), viene determinata in modo concettualmente analogo a quello della Teoria della Distanza Critica, introducendo però una funzione peso al fine di considerare il gradiente tensionale superficiale e le tensioni elasto-plastiche nella FPZ.

### **3.2 Procedura per l'impiego congiunto di criteri di fatica e approcci non-locali**

L'analisi del comportamento a fatica da contatto viene generalmente condotta attraverso l'impiego di approcci analitici e/o numerici. L'impiego di tali approcci risulta essere necessario soprattutto dal punto di vista pratico/tecnologico. Infatti, il monitoraggio delle fessure nella fatica da contatto risulta essere piuttosto difficoltoso, essendo le fessure presenti al di sotto della regione di contatto, e di ridotte dimensioni tanto che i metodi sperimentali di monitoraggio non riescono ad identificarle accuratamente (Hojjati-Talemi, 2013; Vantadori, 2017).

Lo stato dell'arte dimostra come in letteratura siano diversi gli approcci analitici/numerici proposti per l'analisi del comportamento a fatica da contatto negli elementi metallici. In tale contesto, i criteri di fatica multiassiale risultano essere ampiamente i più utilizzati per l'analisi del comportamento a fatica in presenza di contatto, dal momento che la presenza dei carichi tangenziali e delle tensioni cicliche provoca uno stato tensionale multiassiale all'interno dei componenti.

Tuttavia, l'impiego di criteri di fatica multiassiale nel punto più sollecitato, generalmente situato sulla superficie di contatto e chiamato *Hot-spot*, conduce ad valutazione della vita a fatica ampiamente sottostimata (Nowell, 1988; Amargier, 2010; Amrouche, 2014), dal momento che l'effetto del gradiente tensionale non viene preso in considerazione. Al fine di ottenere una stima più accurata della vita

a fatica, i criteri di fatica multiassiale vengono, quindi, applicati congiuntamente ad approcci non-locali, che considerano uno stato tensionale rappresentativo del problema situato ad una certa distanza dall'*Hot-spot* e detto punto critico (Flavenot, 1989; Szolwinski, 1998; Fouvry, 2002; Araújo, 2002; Navarro, 2003; Navarro, 2004; Araújo, 2007; Muñoz, 2007; Araújo, 2008; Navarro, 2008; Navarro, 2011; Giner, 2011; Vázquez, 2014; Araújo, 2015; Castro, 2015), o mediato lungo una linea (Araújo, 1999; Araújo, 2002) o in un volume (Fouvry, 1998; Qylafku, 1999; Fouvry, 2000; Fouvry, 2002; Araújo, 2002; Araújo, 2004; Fouvry, 2004; Proudhon, 2006; Amargier, 2010).

Tali approcci, originariamente proposti per lo studio del comportamento a fatica di componenti intagliati, possono essere estesi alla fatica da contatto. Esiste, infatti, un'analogia tra componenti intagliati e componenti soggetti a fatica da contatto, dal momento che entrambi manifestano la presenza di una concentrazione di tensioni e di gradienti tensionali elevati (Araújo, 2004; Araújo, 2007; Araújo, 2016).

In particolare, la procedura per l'impiego congiunto di criteri di fatica multiassiale con approcci non-locali si compone delle seguenti fasi:

- (i) determinazione delle distribuzioni di carico agenti in corrispondenza della superficie di contatto tra i componenti;
- (ii) determinazione dello stato tensionale indotto all'interno dei componenti;
- (iii) individuazione del punto più sollecitato sulla superficie di contatto;
- (iv) impiego dell'approccio non-locale per la determinazione del punto in cui applicare il criterio di fatica multiassiale (punto critico);
- (v) analisi a fatica del componente strutturale.

Tali fasi vengono riportate graficamente nel diagramma di flusso in *Figura 3.1*.

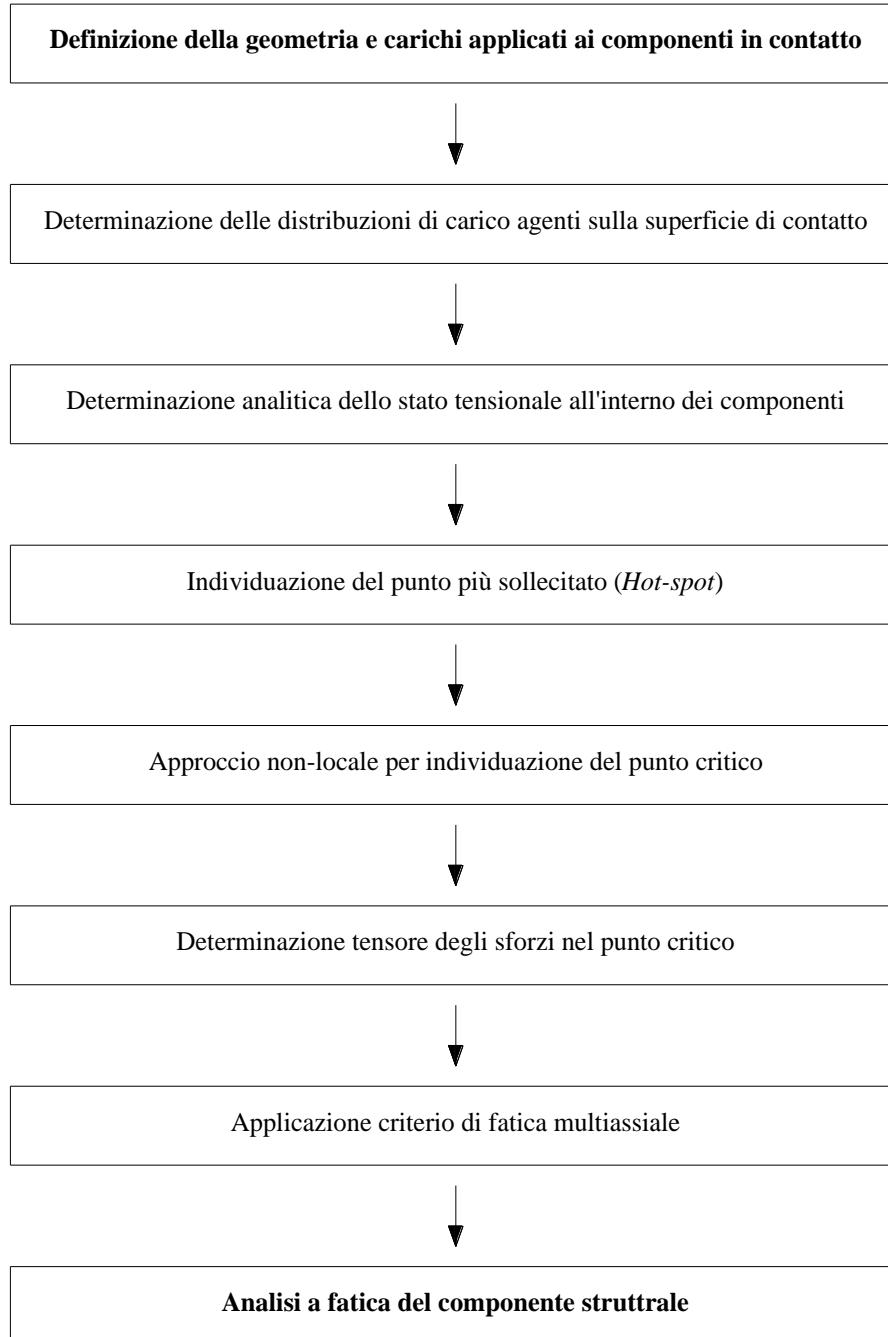


Figura 3.1 Procedura per l'impiego congiunto di un criterio di fatica multiassiale e di un approccio non-locale, per l'analisi di componenti strutturali soggetti a fatica da contatto.

### 3.2.1 Criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri et al.

Il criterio di Carpinteri et al. appartiene alla categoria dei criteri basati sull'approccio del piano critico, formulati sulla base dell'osservazione sperimentale del fenomeno di nucleazione e crescita delle fessure per fatica (Marquis, 2003). Secondo tali criteri, l'analisi a fatica di un componente strutturale viene condotta impiegando una combinazione di tensioni e/o deformazioni su uno specifico piano materiale (detto piano critico). In regime di alto numero di cicli (ossia con numero di cicli maggiore di  $10^5$ ), i criteri basati sull'approccio del piano critico sono generalmente formulati in termini di tensioni (Findley, 1959; Mataka, 1977; McDiarmid, 1987; McDiarmid, 1991; Susmel, 2002; Karolczuk, 2006; Carpinteri, 2011; Łagoda, 2014). La giacitura del piano critico può essere determinata massimizzando alcune componenti di tensione (Łagoda, 2005; Susmel, 2013; Anes, 2014; Li, 2014; Susmel, 2014; Kluger, 2015; Wang, 2015) oppure può essere messa in correlazione con le direzioni principali di tensione/deformazione, opportunamente pesate (Macha, 1989; Carpinteri, 2000; Carpinteri 2002).

Il criterio di Carpinteri et al. si compone delle seguenti fasi:

- (i) determinazione delle direzioni medie degli assi principali di tensione;
- (ii) determinazione della giacitura del piano critico;
- (iii) determinazione delle componenti di tensione agenti su tale piano;
- (iv) valutazione della vita a fatica.

Tali fasi vengono schematicamente riportate in *Figura 3.2* e nel seguito dettagliate.

Si consideri un punto P di un generico componente strutturale, e sia  $\sigma(t)$  il relativo tensore degli sforzi. I coseni direttori delle direzioni principali 1, 2 e 3 (con  $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t) \geq \sigma_3(t)$ ) possono essere determinati, per un dato istante temporale  $t$ , a partire dal tensore degli sforzi  $\sigma(t)$ . Il sistema di riferimento P123, con origine nel punto P e assi coincidenti con le direzioni principali di tensione, può essere univocamente individuato attraverso i tre angoli principali di Eulero ( $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , *Figura 3.3*) che rappresentano tre rotazioni successive intorno agli assi Z, Y' e 1, rispettivamente.

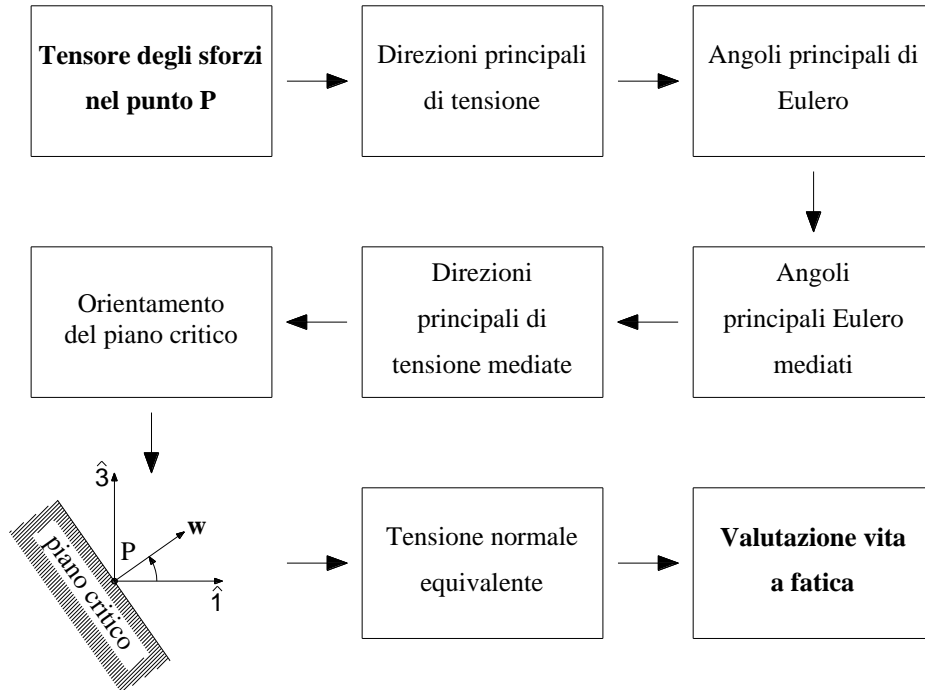


Figura 3.2 Rappresentazione grafica della formulazione del criterio di Carpinteri et al.

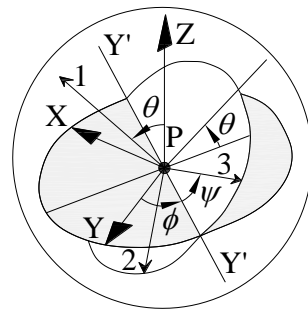


Figura 3.3 Direzioni principali di tensione 1, 2 e 3, definite mediante gli angoli principali di Eulero  $\phi, \theta, \psi$ .

Il procedimento di determinazione degli angoli di Eulero, a partire dai coseni direttori delle tensioni principali, prevede che tali angoli siano ridotti ai seguenti intervalli:  $0 \leq \phi, \theta \leq \pi/2$  e  $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$  (Carpinteri, 1999).



In presenza di carichi ciclici, le componenti del tensore degli sforzi, le direzioni principali di tensione e i corrispondenti angoli di Eulero variano nel tempo. Come evidenziato da Carpinteri e collaboratori, ciò si verifica anche con sollecitazioni cicliche uniassiali di trazione-compressione (Carpinteri, 1999) e con sollecitazioni cicliche di flessione-torsione (Carpinteri, 2000). Di conseguenza, Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2011) proposero la determinazione delle direzioni medie principali di tensione  $\hat{1}$ ,  $\hat{2}$  e  $\hat{3}$  attraverso l'impiego degli angoli medi di Eulero,  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\psi}$  (Figura 3.4), introducendo una opportuna funzione peso  $W$ :

$$\hat{\phi} = \frac{1}{W} \int_0^T \phi(t) W(t) dt \quad \hat{\theta} = \frac{1}{W} \int_0^T \theta(t) W(t) dt \quad \hat{\psi} = \frac{1}{W} \int_0^T \psi(t) W(t) dt \quad (3.1)$$

dove  $T$  rappresenta il periodo e  $W(t)$  la funzione peso, definita come:

$$W(t) = H[\sigma_1(t) - \sigma_{1,max}] \quad (3.2)$$

con  $H[x]=1$  per  $x=0$  e  $H[x]=0$  per  $x \neq 0$ , e con  $\sigma_{1,max}$  pari al valore massimo della tensione principale,  $\sigma_1$ , raggiunta in un ciclo di carico.

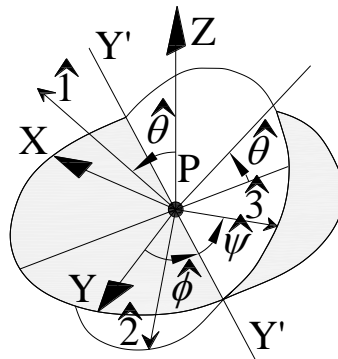


Figura 3.4 Direzioni principali medie di tensione  $\hat{1}$ ,  $\hat{2}$  e  $\hat{3}$ , definite mediante gli angoli medi di Eulero  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\psi}$ .

Come osservato sperimentalmente da Brown e Miller (Brown, 1973), sulla base di una campagna di prove sperimentali condotta su materiali metallici, il processo di fessurazione per fatica si compone di due fasi:

- una prima fase, chiamata Stage 1, caratterizzata dalla nucleazione della fessura (generalmente sulla superficie esterna del componente) lungo il piano di massima tensione tangenziale. In tale fase, la frattura è di Modo II, e la fessura si forma per coalescenza di microfessure alla scala mesoscopica;
- una seconda fase, chiamata Stage 2, caratterizzata dalla propagazione della fessura su un piano normale alla direzione della massima tensione principale. In tale fase, la frattura è di Modo I, e la fessura raggiunge dimensioni alla scala macroscopica.

Sulla base delle osservazioni di cui sopra, e considerando che alcuni materiali metallici sono caratterizzati da un meccanismo di fessurazione in cui lo Stage 2 è predominante rispetto allo Stage 1 (come avviene per i metalli duri ed estremamente duri) e viceversa (come avviene per i metalli dolci), appare adeguato definire la giacitura del piano critico considerando sia il meccanismo di frattura di Modo I, sia quello di Modo II.

In tale contesto, Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2001; Carpinteri, 2011) proposero una procedura per considerare entrambi i meccanismi di frattura. La procedura prevede l'iniziale determinazione del piano di frattura, e la successiva individuazione del piano critico attraverso l'impiego di un angolo di rotazione, funzione dei limiti di fatica del materiale per tensione normale alterna e tangenziale alterna. Più precisamente, Macha (Macha, 1989) osservò: che la posizione del piano di frattura risultava correlata alle direzioni principali di tensione, e che la resistenza a fatica risultava fortemente influenzata dalle tensioni principali.

Conseguentemente, secondo Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2000), la normale al piano di frattura, cioè quel piano osservato "post mortem" a livello macroscopico, è assunta coincidente con la direzione media  $\hat{1}$ , e viene definito l'angolo di rotazione  $\delta$ , tra la normale al piano critico,  $\mathbf{w}$ , e la normale al piano di frattura di cui sopra, attraverso la seguente espressione empirica:

$$\delta = \frac{3\pi}{8} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_{af,-1}}{\sigma_{af,-1}} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

dove  $\sigma_{af,-1}$  è il limite di fatica per tensione normale alterna, mentre  $\tau_{af,-1}$  è il limite di fatica per tensione tangenziale alterna del materiale. La rotazione  $\delta$  viene generalmente eseguita nel piano delle tensioni principali  $\hat{1} \hat{3}$ . Tuttavia, nei problemi piani tale rotazione assume un significato fisico solo quando eseguita nel piano delle tensioni, quindi: nel piano  $\hat{1} \hat{3}$  quando la tensione principale  $\sigma_2$  è pari a zero, mentre nel piano  $\hat{1} \hat{2}$  quando la tensione principale  $\sigma_3$  è pari a zero.

È possibile notare dall'Eq.(3.3) come l'angolo  $\delta$  sia pari a  $0^\circ$  quando il rapporto tra i limiti di fatica  $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1} = 1$  (valore tipico dei metalli estremamente duri), mentre è pari a  $45^\circ$  per  $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1} = 1/\sqrt{3}$  (valore limite tra metalli duri e dolci). Ciò risulta essere in accordo con le evidenze sperimentali (Brown, 1973). Infatti, nei metalli duri lo Stage 2 è predominante e il piano critico tende a coincidere con il piano di frattura (ossia  $\delta = 0^\circ$ ), mentre nei metalli dolci lo Stage 1 è predominante, e il piano critico tende a coincidere con il piano di nucleazione della fessura (ossia  $\delta = 45^\circ$ ).

Definita la normale  $\mathbf{w}$  al piano critico, si consideri un sistema di riferimento locale Puvw, in cui  $\mathbf{u}$  rappresenta l'intersezione tra il piano critico e il piano definito dal versore  $\mathbf{w}$  e dall'asse Z, mentre  $\mathbf{v}$  è normale a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ . Tali assi vengono individuati, rispetto al sistema di riferimento PXYZ, attraverso due angoli,  $\varphi$  e  $\vartheta$ , come mostrato in *Figura 3.5*.

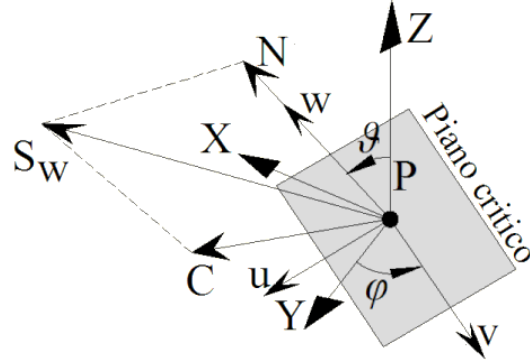


Figura 3.5 Sistema di riferimento relativo al piano critico, Puvw.

Il vettore tensione,  $\mathbf{S}_w$ , nel punto P risulta pari a:

$$\mathbf{S}_w = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} \quad (3.4)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è il tensore degli sforzi.

Il vettore  $\mathbf{S}_w$  può essere scomposto nella componente normale al piano critico,  $\mathbf{N}$ , e nella componente tangenziale agente sul piano critico,  $\mathbf{C}$  (Figura 3.5). È possibile determinare tali componenti come segue:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w) \cdot \mathbf{w} \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_w - \mathbf{N} \quad (3.5b)$$

In presenza di carichi ciclici ad ampiezza costante, tali componenti di tensione sono funzioni periodiche. In particolare, mantenendo fissa la propria direzione nel tempo (coincidente con  $\mathbf{w}$ ), il modulo di  $\mathbf{N}$  può essere espresso come:

$$N(t) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w} \quad (3.6)$$

in cui  $N(t)$  risulta essere anch'esso uno scalare periodico. È possibile quindi esprimerne l'ampiezza e il valore medio come segue:

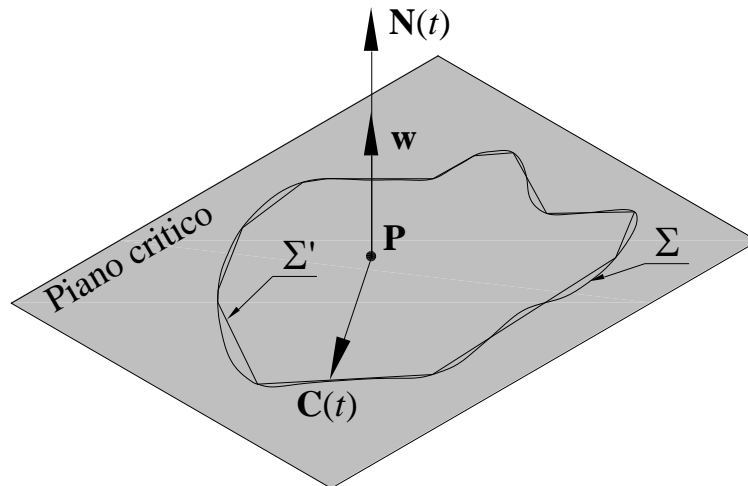
$$N_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) - \min_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) \right\} \quad (3.7a)$$

$$N_m = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) + \min_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) \right\} \quad (3.7b)$$

mentre il valore massimo risulta essere pari a:

$$N_{max} = N_a + N_m \quad (3.8)$$

La determinazione dell'ampiezza,  $C_a$ , e del valore medio,  $C_m$ , della componente tangenziale  $\mathbf{C}$ , non è così immediata. Infatti,  $\mathbf{C}$  varia nel tempo sia in valore che in direzione. In particolare, durante la storia di carico, il vettore  $\mathbf{C}$  descrive sul piano critico una curva chiusa,  $\Sigma$ , come mostrato in *Figura 3.6*.



*Figura 3.6* Percorso descritto dalla componente tangenziale di tensione,  $\mathbf{C}(t)$ , in un ciclo di carico.

L'equazione in forma chiusa di tale curva può essere determinata solo per storie di carico particolarmente semplici. Per storie di carico più complesse, invece, la curva può essere approssimata ad una poligonale chiusa,  $\Sigma'$ , composta da  $n$  vertici tali per cui  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma' = \Sigma$  (Carpinteri, 2014).

Allo scopo di determinare l'ampiezza della tensione tangenziale  $\mathbf{C}$ , possono essere impiegati diversi metodi disponibili in letteratura (Susmel, 2009). In particolare, è possibile fare riferimento al *Longest Chord (LC) method* (Lemaitre, 1990), al *Longest Projection (LP) method* (Grubisic, 1976) o ancora al *Minimum*

*Bounding Circle (MBC) method* (Papadopoulos, 1998). Tali metodi, tuttavia, in alcuni casi non sono in grado di individuare il valore di  $C_a$  e  $C_m$  in modo univoco, oltre a risultare computazionalmente onerosi per storie di carico complesse.

Un metodo di recente formulazione per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale,  $C_a$ , è rappresentato dal *Maximum Rectangular Hull (MRH) method*, proposto da Araújo e collaboratori (Mamiya, 2002; Mamiya, 2009; Araújo, 2011).

Tale metodo, implementato nel criterio di Carpinteri (Carpinteri, 2013b; Carpinteri, 2014), considera dei rettangoli (*hull*) per circoscrivere la curva  $\Sigma$ . In particolare, ogni rettangolo risulta essere caratterizzato da un orientamento  $\theta$  rispetto al sistema di riferimento  $P_{uvw}$  (Figura 3.7)

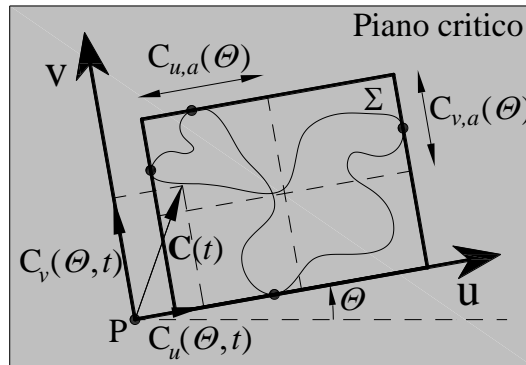


Figura 3.7 Generico rettangolo che circoscrive il percorso,  $\Sigma$ , della tensione tangenziale  $C$  sul piano critico.

Il vettore della tensione tangenziale,  $C$ , agente sul piano critico, può quindi essere scomposto nelle componenti agenti secondo le direzioni  $u$ ,  $C_u$ , e  $v$ ,  $C_v$ . Le semi-lunghezze dei lati del rettangolo possono quindi essere calcolate come segue:

$$C_{u,a}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \max_{0 \leq t < T} C_u(t, \theta) - \min_{0 \leq t < T} C_u(t, \theta) \right] \quad (3.9a)$$

$$C_{v,a}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \max_{0 \leq t < T} C_v(t, \theta) - \min_{0 \leq t < T} C_v(t, \theta) \right] \quad (3.9b)$$

In accordo con il *MRH method*, l'ampiezza della tensione tangenziale,  $C_a$ , è definita come:

$$C_a = \max_{0 \leq \theta < 90^\circ} \sqrt{[C_{u,a}(\theta)]^2 + [C_{v,a}(\theta)]^2} \quad (3.10)$$

La valutazione della resistenza a fatica viene condotta riducendo lo stato di tensione multiassiale ad uno monoassiale equivalente. In particolare, viene definita una tensione equivalente di ampiezza  $\sigma_{a,eq}$ , la quale viene confrontata con il limite di fatica per tensione normale alterna  $\sigma_{af,-1}$ :

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{N_{a,eq}^2 + \left( \frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}} \right)^2} C_a^2 = \sigma_{af,-1} \quad (3.11)$$

dove, sulla base della relazione di Goodman (Goodman, 1899), l'ampiezza della tensione normale equivalente,  $N_{a,eq}$ , è definita come:

$$N_{a,eq} = N_a + \sigma_{af,-1} \left( \frac{N_m}{\sigma_u} \right) \quad (3.12)$$

dove  $\sigma_u$  è la resistenza ultima del materiale a trazione. In particolare, l'Eq.(3.12) permette di tenere in considerazione l'effetto della tensione media sulla resistenza a fatica.

La valutazione della vita a fatica viene condotta considerando le espressioni di Basquin (Basquin, 1910) per sforzo normale alterno e sforzo tangenziale alterno. In particolare, in luogo dei limiti di fatica  $\sigma_{af,-1}$  e  $\tau_{af,-1}$  vengono considerate, rispettivamente, le resistenze a fatica per vita finita  $\sigma'_{af,-1}$  e  $\tau'_{af,-1}$ , pari a:

$$\sigma'_{af,-1} = \sigma_{af,-1} \left( N_f / N_0 \right)^m \quad (3.13a)$$

$$\tau'_{af,-1} = \tau_{af,-1} \left( N_f / N_0 \right)^{m^*} \quad (3.13b)$$

dove  $N_0$  è pari al numero di cicli di carico di riferimento (generalmente  $N_0=2 \cdot 10^6$ ), mentre  $m$  e  $m^*$  rappresentano la pendenza della curva S-N per tensione normale

alterna e tangenziale alterna, rispettivamente. È quindi possibile riscrivere l'Eq.(3.11) come segue:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\left(N'_{a,eq}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}}\right)^2 \left(\frac{N_f}{N_0}\right)^{2m} \left(\frac{N_0}{N_f}\right)^{2m^*}} C_a^2 = \sigma_{af,-1} \left(\frac{N_f}{N_0}\right)^m \quad (3.14)$$

in cui:

$$N'_{a,eq} = N_a + \sigma_{af,-1} \left(\frac{N_f}{N_0}\right)^m \left(\frac{N_m}{\sigma_u}\right) \quad (3.15)$$

Il numero di cicli a rottura,  $N_f$ , può essere determinato risolvendo l'Eq.(3.14) mediante l'impiego di una procedura iterativa.

### 3.2.2 Approcci non-locali: stato dell'arte

Nella presente Sezione vengono descritti alcuni degli approcci non-locali tra i più utilizzati in letteratura i quali, applicati congiuntamente ad un generico criterio di fatica multiassiale, permettono di valutare la vita a fatica del componente metallico sollecitato da fatica per contatto.

In particolare, l'impiego di approcci non-locali permette di tenere in considerazione la presenza dell'elevato gradiente tensionale in corrispondenza della superficie di contatto (Nowell, 1988; Amargier, 2010). Tali approcci hanno trovato largo impiego nello studio di situazioni caratterizzate da elevati gradienti tensionali, principalmente per la loro semplicità e per i risultati in accordo con l'evidenza sperimentale.

#### 3.2.2.1 Teoria della distanza critica

La Teoria della Distanza Critica rappresenta l'approccio non-locale tra i più utilizzati nell'ultimo decennio, soprattutto per la sua semplicità e praticità di applicazione. In particolare, i primi tentativi nella definizione di una teoria per la stima della resistenza a fatica di componenti strutturali soggetti a fenomeni di concentrazione degli sforzi, fu proposta da Neuber (Neuber, 1936; Neuber, 1958), attraverso la media della tensione principale massima nell'intorno del punto più



sollecitato (*Hot-spot*,  $H$ ), definendo un'unità caratteristica del materiale come misura di riferimento.

Successivamente, Peterson (Peterson, 1959) sviluppò ulteriormente l'idea iniziale di Neuber, semplificandola. Infatti, Peterson giunse alla conclusione che, nella progettazione a fatica di elementi strutturali in presenza di concentratori tensionali, la definizione di una tensione di riferimento in un punto posto ad una certa distanza dal concentratore stesso potesse essere di più agevole applicazione, definendo il cosiddetto *Point Method* (PM). Tuttavia, le idee di Neuber e Peterson risultarono di difficile applicazione, soprattutto per la mancanza di strumenti analitici/numerici per la definizione del campo tensionale in vicinanza di zone caratterizzate dalla presenza di concentratori tensionali.

Negli anni successivi, i concetti sviluppati e i risultati ottenuti nel campo della Meccanica della Frattura Elastica Lineare (LEFM), insieme al crescente sviluppo di metodi agli elementi finiti (FE), hanno permesso alle idee iniziali di Neuber e Peterson di essere riviste e applicate agevolmente nella comune pratica progettuale.

In tale contesto, Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007) propose la Teoria della Distanza Critica, sulla base di concetti legati proprio alla LEFM e alla meccanica del continuo, distanza capace di stimare efficacemente il danno a fatica di componenti contenenti non solo concentratori tensionali, ma anche di fessure. La Teoria della Distanza Critica assume, come ipotesi iniziale, che il danno a fatica in presenza di concentratori tensionali debba essere correlato a una tensione effettiva in campo elastico lineare,  $\sigma_{eff}$ , rappresentativa della zona interessata dal danneggiamento. In particolare, viene assunto che la condizione limite è raggiunta quando  $\sigma_{eff} = \sigma_{af,-1}$ , dove  $\sigma_{af,-1}$  rappresenta il limite di fatica per tensione normale alterna del materiale in assenza di concentratori tensionali. La tensione effettiva  $\sigma_{eff}$  può essere calcolata in differenti modi, previa definizione di una distanza detta distanza critica,  $L$ . Esistono vari formalismi per la definizione di  $L$ , i quali tuttavia sono caratterizzati da un aspetto comune, ossia che  $L$  sia un parametro intrinseco del materiale. ElHaddad, in particolare, propose la seguente formulazione (ElHaddad, 1980) basata su concetti della meccanica della frattura:

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{I,th}}{2\sigma_{af,-1}} \right)^2 \quad (3.16)$$

in cui  $\Delta K_{I,th}$  rappresenta il valore di soglia del fattore di intensità degli sforzi.

La Teoria della Distanza Critica può essere formalizzata in diversi modi, in funzione del dominio di integrazione utilizzato per determinare il valore di  $\sigma_{eff}$ .

Più precisamente, i formalismi di uso più comune sono:

- (i) *Point Method (PM)*;
- (ii) *Line Method (LM)*;
- (iii) *Area Method (AM)*.

Per illustrare i formalismi di cui sopra, si consideri una piastra infinitamente estesa in direzione  $y$ , con una fessura di larghezza pari a  $2a$  al centro e caricata agli estremi da una tensione remota  $\sigma$  (Figura 3.8).

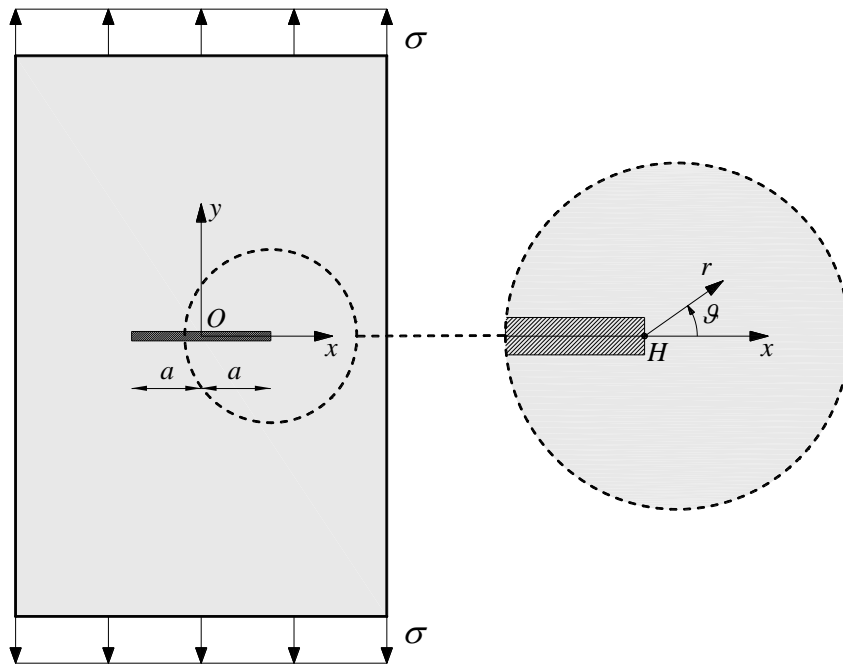


Figura 3.8 Geometria del concentratore tensionale considerato.

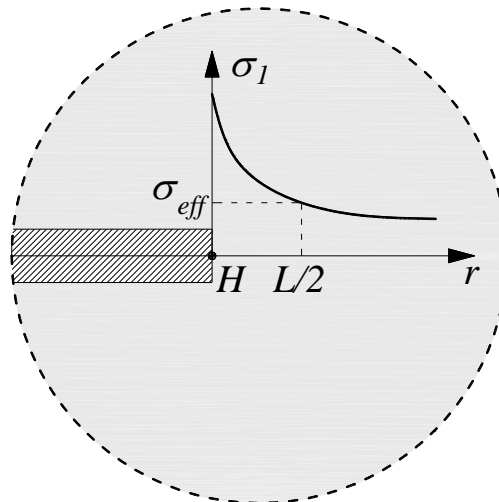
Si consideri inoltre un sistema di riferimento  $r, \vartheta$  con origine nel punto  $H$ , coincidente con l'apice della fessura (*Figura 3.8*). È possibile esprimere la tensione principale massima  $\sigma_1$  nell'intorno dell'apice della fessura come (Westergaard, 1939):

$$\sigma_1(\vartheta, r) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \right] \quad (3.17)$$

Nel *Point Method*, il valore della tensione effettiva,  $\sigma_{eff}$ , è calcolato in un punto posto ad una certa distanza dall'*Hot-spot H*. Tale distanza risulta essere pari a  $L/2$ , per cui vale la seguente relazione:

$$\sigma_{eff} = \sigma_1(\vartheta = 0, r = L/2) \quad (3.18)$$

dove  $\sigma_1$  è pari alla tensione principale massima. La rappresentazione schematica dell'applicazione del PM è riportata in *Figura 3.9*.



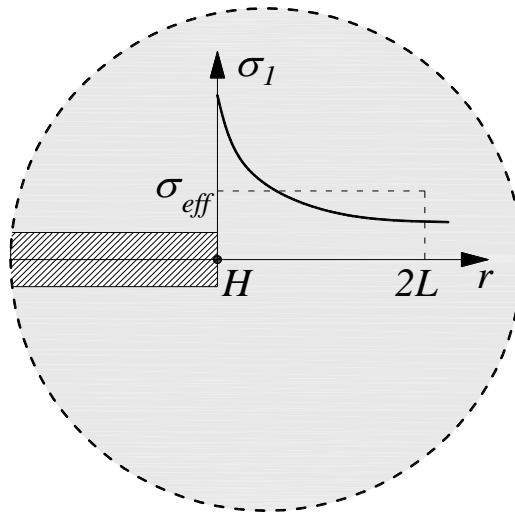
*Figura 3.9 Rappresentazione schematica del Point Method.*

In accordo con l'idea iniziale di Neuber (Neuber, 1936; Neuber, 1958), può essere condotta una procedura di media del campo tensionale elastico-lineare anche lungo una linea, definendo così il *Line Method*. In particolare, la tensione effettiva

viene mediata su una linea di lunghezza pari a  $2L$ , distanza misurata da  $H$ , e viene calcolata come segue:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma_1(\vartheta = 0, r) dr \quad (3.19)$$

La rappresentazione schematica dell'applicazione del LM è riportata in *Figura 3.10*.



*Figura 3.10 Rappresentazione schematica del Line Method.*

Nell'*Area Method*, la tensione effettiva viene calcolata mediando il campo tensionale su una superficie semi-circolare, centrata nel punto  $H$  e di raggio  $L$ . In particolare, a partire dalle considerazioni di Sheppard (Sheppard, 1991), Taylor definì per il calcolo di  $\sigma_{eff}$ , la seguente espressione:

$$\sigma_{eff} = \frac{4}{\pi L^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^L \sigma_1(\vartheta, r) r dr d\vartheta \quad (3.20)$$

La rappresentazione schematica dell'applicazione dell'AM è riportata in *Figura 3.11*.

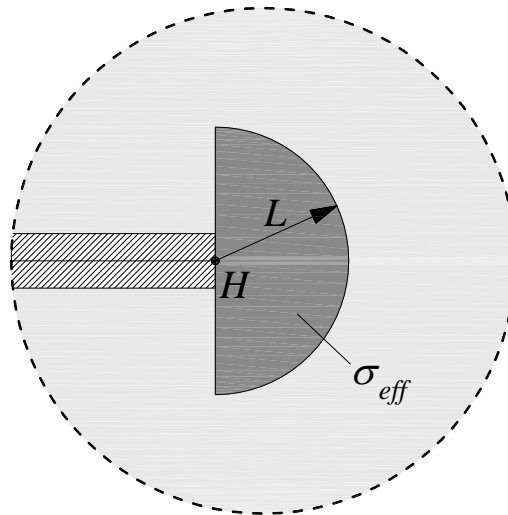


Figura 3.11 Rappresentazione schematica dell'Area Method.

### 3.2.2.2 Distanza critica funzione del numero di cicli

La Teoria della Distanza Critica presentata alla Sezione 3.2.2.1 prevede, per la valutazione della resistenza a fatica di componenti strutturali in presenza di concentratori tensionali, la definizione di una distanza la quale risulta essere costante, e funzione dei soli parametri meccanici del materiale.

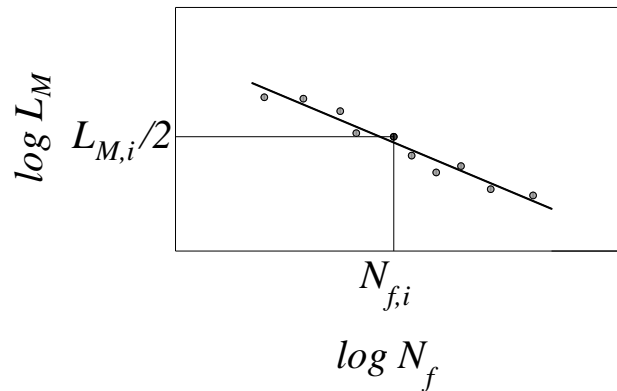
Tuttavia è stato osservato come tale distanza, nella stima della resistenza a fatica per vita finita, debba dipendere da ulteriori parametri. In particolare, Susmel (Susmel, 2007) propose un'estensione della Teoria della Distanza Critica basata sull'osservazione che la distanza critica,  $L_M$ , debba diminuire all'aumentare del numero di cicli a rottura,  $N_f$ . Questo comportamento può essere spiegato osservando che, in prossimità del concentratore tensionale, le dimensioni della regione plastica del materiale aumentano al diminuire dell'ampiezza dei carichi applicati (Kouanga, 2018).

Di conseguenza, al fine di poter considerare il comportamento del materiale elastico-lineare, è necessario definire una distanza critica,  $L$ , inversamente proporzionale al numero di cicli a rottura,  $N_f$  (Susmel, 2007; Susmel, 2009). Tale estensione della Teoria della Distanza Critica viene proposta da Susmel (Susmel, 2002) congiuntamente impiegata con il *Modified Wöhler Curve Method* (MWCM).

In tale contesto, Susmel (Susmel, 2007; Susmel, 2009) definì una formulazione piuttosto semplice per la determinazione della distanza critica,  $L_M$ , proponendo la seguente relazione:

$$L_M = A N_f^B \quad (3.21)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti funzione del materiale, determinabili da curve S-N relative a provini lisci e a provini contenenti concentratori tensionali con caratteristiche geometriche note (Susmel, 2007; Susmel, 2008). Una rappresentazione schematica del legame tra distanza critica e il numero di cicli è riportata in *Figura 3.12*.



*Figura 3.12 Rappresentazione schematica dell'andamento della distanza critica  $L_M$  in funzione del numero di cicli  $N_f$ .*

In particolare, la taratura delle costanti  $A$  e  $B$  richiede, fissato un numero di cicli a rottura,  $N_{f,i}$ , l'individuazione della distanza,  $L_{M,i}/2$ , da  $H$  alla quale la tensione principale  $\sigma_1$  eguaglia la resistenza a fatica per vita finita,  $\sigma'_{af,-1}(N_{f,i})$ . Tale tensione può essere calcolata impiegando metodi analitici, o equivalentemente modelli agli elementi finiti. È possibile quindi, attraverso un'interpolazione lineare nel piano  $\log N_f - \log L_M$  delle coppie  $N_{f,i}-L_M$  considerate, determinare il valore delle costanti  $A$  e  $B$  per lo specifico materiale considerato.

### 3.2.2.3 Distanza critica funzione del gradiente tensionale

Fouvry e collaboratori (Fouvry, 2014) notarono come, in situazioni caratterizzate da gradienti tensionali molto elevati, l'utilizzo di una distanza critica costante non fosse in grado di cogliere l'effetto di tali gradienti, sottostimando eccessivamente la vita a fatica del componente. In particolare, sulla base di alcune osservazioni sperimentali (Ferré, 2013; Fouvry, 2014), notarono come tale distanza critica dovesse essere variabile e funzione, oltre che delle caratteristiche a fatica del materiale, anche del gradiente tensionale in prossimità della zona di nucleazione della fessura.

Si definisca, quindi, il gradiente della tensione idrostatica,  $\bar{\nabla}\sigma_{H,max}$ , considerato mediato su un volume cubico di lato pari alla lunghezza di nucleazione della fessura,  $b_{pth}$ , (Amargier, 2010), e pari a:

$$\bar{\nabla}\sigma_{H,max} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma_{H,max}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\sigma_{H,max}}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\sigma_{H,max}}{\Delta z}\right)^2} \quad (3.22)$$

dove  $\Delta\sigma_{H,max}$  rappresenta la tensione idrostatica nell'*Hot-spot*, mentre  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = b_{pth}$ .

Fouvry e collaboratori proposero un legame tra la distanza critica  $L_F$  e il gradiente della tensione idrostatica mediato  $\bar{\nabla}\sigma_{H,max}$  descritto da una funzione di tipo trilineare, con primo e ultimo tratto costanti al variare di  $\bar{\nabla}\sigma_{H,max}$ , mentre quello intermedio variabile linearmente. Tale tipologia di legame viene proposta per ovviare al problema di ottenere, con una semplice approssimazione lineare, una distanza critica tendente a zero per gradienti tensionali contenuti e, viceversa, un valore della distanza critica tendente a infinito per gradienti tensionali elevati.

In particolare tale legame trilineare, rappresentato schematicamente in *Figura 3.13*, prevede la definizione di due valori soglia del gradiente tensionale,  $\bar{\nabla}\sigma_{H,I}$  e  $\bar{\nabla}\sigma_{H,II}$  rispettivamente, e più precisamente descritto da:

(i) un primo tratto caratterizzato da un gradiente tensionale contenuto ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,max} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,I}$ ), in cui la distanza critica è pari a quella fornita dal PM, ossia pari a  $L/2$ ;

- (ii) un secondo tratto caratterizzato da un gradiente tensionale intermedio ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,I} < \bar{\nabla}\sigma_{H,max} < \bar{\nabla}\sigma_{H,II}$ ), in cui la distanza critica cresce linearmente, da un valore minimo (pari a  $L/2$ ) a un valore massimo (pari a  $2L$ );
- (iii) un terzo tratto caratterizzato da un gradiente tensionale elevato ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,max} \geq \bar{\nabla}\sigma_{H,II}$ ), in cui la distanza critica è pari a 4 volte quella fornita dal PM, ossia pari a  $2L$ .

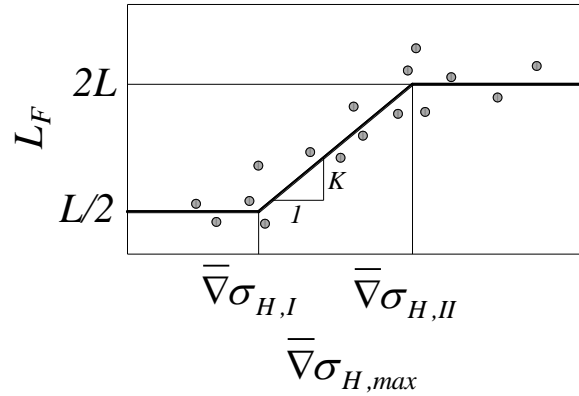


Figura 3.13 Rappresentazione schematica dell'andamento della distanza critica,  $L_F$ , in funzione del gradiente tensionale medio,  $\bar{\nabla}\sigma_{H,max}$  (legame trilineare).

È possibile esprimere il presente legame attraverso le seguenti equazioni:

$$L_F = L/2 \quad \text{per } \bar{\nabla}\sigma_{H,max} < \bar{\nabla}\sigma_{H,I} \quad (3.23a)$$

$$L_F = K(\bar{\nabla}\sigma_{H,max} - \bar{\nabla}\sigma_{H,I}) + L/2 \quad \text{per } \bar{\nabla}\sigma_{H,I} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,max} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,II} \quad (3.23b)$$

$$L_F = 2L \quad \text{per } \bar{\nabla}\sigma_{H,max} > \bar{\nabla}\sigma_{H,II} \quad (3.23c)$$

dove  $K = (2L - L/2) / (\bar{\nabla}\sigma_{H,II} - \bar{\nabla}\sigma_{H,I})$ . I valori soglia  $\bar{\nabla}\sigma_{H,I}$  e  $\bar{\nabla}\sigma_{H,II}$  possono essere ottenuti attraverso l'interpolazione lineare di dati sperimentali in termini di  $L - \bar{\nabla}\sigma_{H,max}$ . Tuttavia, tale interpolazione richiede, generalmente, un elevato numero di dati sperimentali.



Una strategia alternativa, la quale richiede l'impiego di un numero minore di dati, prevede l'utilizzo di un'approssimazione bilineare, che richiede tre valori limite del gradiente tensionale all'interno dei set di dati sperimentali a disposizione: il valore minimo ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,LB}$ ), il valore massimo ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,UB}$ ) e il valore intermedio ( $\bar{\nabla}\sigma_{H,MB}$ ). Il legame  $L_F - \bar{\nabla}\sigma_{H,max}$  (Figura 3.14) può quindi essere riscritto come segue:

$$L_F = K_{LB} (\bar{\nabla}\sigma_{H,max} - \bar{\nabla}\sigma_{H,LB}) + L_{LB} \quad \text{per } \bar{\nabla}\sigma_{H,LB} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,max} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,MB} \quad (3.24a)$$

$$L_F = K_{UB} (\bar{\nabla}\sigma_{H,max} - \bar{\nabla}\sigma_{H,MB}) + L_{MB} \quad \text{per } \bar{\nabla}\sigma_{H,MB} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,max} \leq \bar{\nabla}\sigma_{H,UB} \quad (3.24b)$$

con:

$$K_{LB} = \frac{(L_{MB} - L_{LB})}{(\bar{\nabla}\sigma_{H,MB} - \bar{\nabla}\sigma_{H,LB})} \quad (3.25a)$$

$$K_{UB} = \frac{(L_{UB} - L_{MB})}{(\bar{\nabla}\sigma_{H,UB} - \bar{\nabla}\sigma_{H,MB})} \quad (3.25b)$$

dove  $L_{LB}$ ,  $L_{MB}$  e  $L_{UB}$  rappresentano, rispettivamente, il valore minimo, medio e massimo della lunghezza critica per cui la vita a fatica, determinata applicando un generico criterio di fatica multiassiale, eguaglia la vita a fatica determinata sperimentalmente.

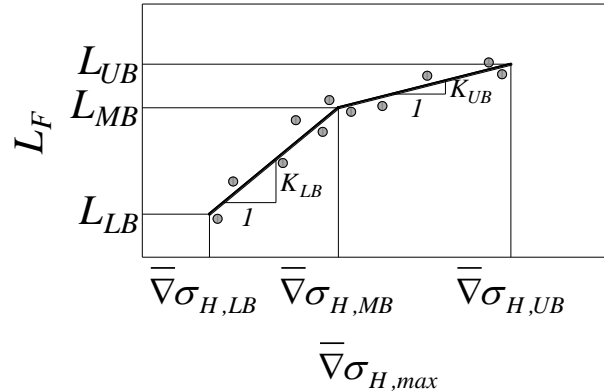


Figura 3.14 Rappresentazione schematica dell'andamento della distanza,  $L_F$ , in funzione del gradiente tensionale medio,  $\bar{\nabla}\sigma_{H,max}$  (legame bilineare).

La presente approssimazione bilineare semplificata risulta essere piuttosto pratica per le applicazioni industriali, ma è valida per valori della distanza critica compresi tra i valori limite  $L_{LB}$  e  $L_{UB}$ .

#### 3.2.2.4 Distanza critica funzione delle tensioni elasto-plastiche

Il metodo di Pluinage (Pluinage, 1999; Adib, 2003) rappresenta un'applicazione del *Line Method*, e impiega la distribuzione delle tensioni elasto-plastiche in prossimità del concentratore tensionale. Una distribuzione tipica delle tensioni misurate lungo la bisettrice del concentratore e agenti in direzione ortogonale alla bisettrice,  $\sigma_{yy}(x)$ , ottenibile da un'analisi elasto-plastica agli elementi finiti, è riportata nel grafico bi-logaritmico di *Figura 3.15*, in cui si possono distinguere tre zone:

(i) zona I: in cui la componente di tensione  $\sigma_{yy}(x)$ , variando sensibilmente, giunge al valore di picco,  $\sigma_{max}$ , ad una distanza  $x=x_m$  dal concentratore. Si noti come, da una generica analisi elastica, il valore di  $\sigma_{max}$  si sarebbe raggiunto in corrispondenza di  $x=0$ , rendendo impossibile la definizione della zona I;

(ii) zona II: in cui si registra un regime di transizione per cui la componente di tensione  $\sigma_{yy}(x)$  decresce dal valore di  $\sigma_{max}$  al valore di tensione effettiva,  $\tilde{\sigma}_{eff}$ ;

(iii) zona III: in cui la componente di tensione  $\sigma_{yy}(x)$  decresce linearmente, secondo una legge esprimibile come:

$$\log \sigma_{yy} = \log C - \alpha \log x \quad (3.26)$$

o, equivalentemente:

$$\sigma_{yy} = \frac{C}{x^\alpha} \quad (3.27)$$

dove  $C$  e  $\alpha$  sono costanti funzione dei carichi e della geometria considerati.

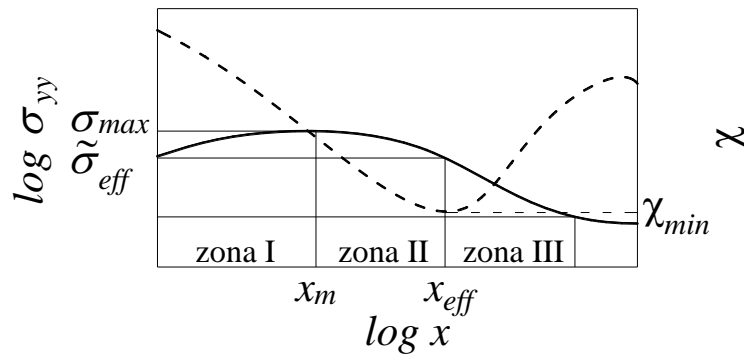


Figura 3.15 Rappresentazione schematica dell'andamento della distanza critica in funzione delle tensioni elasto-plastiche,  $\sigma_{yy}(x)$ .

La distanza  $x$  corrispondente alla frontiera tra la zona II e la zona III è definita distanza effettiva,  $x_{eff}$ . Tale distanza definisce la *Fatigue Process Zone* (FPZ), cioè rappresenta la distanza dalla radice dell'intaglio in cui le deformazioni plastiche, alla micro- e macro-scala, hanno luogo, e i difetti iniziali si sviluppano per coalescenza (Ostash, 1999). La tensione in corrispondenza della distanza effettiva è chiamata tensione effettiva,  $\tilde{\sigma}_{eff}$ .

Si definisca il gradiente tensionale relativo,  $\chi$ , espresso come:

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{yy}(x)} \frac{d\sigma_{yy}(x)}{dx} \quad (3.28)$$

e riportato in *Figura 3.15* in linea tratteggiata. Il valore della distanza effettiva  $x_{eff}$  è assunto pari al valore minimo del gradiente relativo,  $\chi_{min}$ .

L'applicazione del metodo di Pluvillage prevede che la crisi per fatica si verifichi quando la tensione equivalente,  $\sigma_P$ , descritta dalla seguente relazione:

$$\sigma_P = \frac{1}{x_{eff}} \int_0^{x_{eff}} \sigma_y (1 - \chi x) dx \quad (3.29)$$

è pari al limite di fatica per tensione normale alterna del materiale,  $\sigma_{af,-1}$ . Tale metodo di media è concettualmente simile al *Line Method*, in cui però è possibile tenere in considerazione l'effetto prodotto dal gradiente tensionale nella *Fatigue Process Zone*.

### 3.3 Conclusioni

Nel presente Capitolo è stata presentata la procedura generalmente impiegata per l'analisi del comportamento a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a contatto. In particolare, come evidenziato nel Capitolo 2, la fatica da contatto genera, all'interno dei componenti, uno stato di tensione multiassiale. Lo studio dello stato dell'arte ha messo in evidenza come, tra i diversi approcci disponibili in letteratura per l'analisi di tali componenti, quelli più frequentemente adottati siano i criteri di fatica multiassiale.

Tuttavia, l'applicazione di un generico criterio di fatica multiassiale nel punto più sollecitato (*Hot-spot*), può portare alla determinazione di un valore di vita a fatica troppo a favore di sicurezza, essendo tali componenti caratterizzati da concentrazioni tensionali, in prossimità della superficie di contatto, da 2 a 10 volte più elevate rispetto alla fatica pura. Tali concentrazioni tensionali risultano, però, essere localizzate in prossimità della superficie di contatto, decadendo rapidamente procedendo verso l'interno del componente.

In tale contesto, diversi autori hanno proposto, per l'analisi a fatica di componenti strutturali caratterizzati da concentratori tensionali, l'applicazione di

criteri di fatica multiassiale, già ampiamente validati per la fatica pura, congiuntamente ad approcci non-locali, per tenere in considerazione la presenza di elevati gradienti tensionali in prossimità della superficie.

Quindi, nel presente Capitolo è stato presentato un criterio di fatica multiassiale, e più precisamente quello proposto da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a; Araújo, 2014; Carpinteri, 2015), originariamente sviluppato per fatica pura ed esteso, per la prima volta nel presente lavoro di Tesi, alla fatica da contatto (Capitolo 4 e 5).

Successivamente, sono stati presentati i più comuni approcci non-locali disponibili in letteratura e basati sul concetto della distanza critica. In particolare, sono stati presentati i seguenti approcci non-locali:

(i) Teoria della Distanza Critica proposta da Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007), in cui la distanza critica risulta essere costante;

(ii) distanza critica variabile in funzione del numero di cicli a fatica (Susmel, 2007; Susmel, 2009);

(iii) distanza critica variabile in funzione del gradiente tensionale superficiale (Ferrè, 2013; Fouvry, 2014);

(iv) distanza critica variabile in funzione del gradiente tensionale e delle tensioni elasto-plastiche all'interno della Fatigue Process Zone (Pluvinaige, 1999; Adib, 2003);

Per l'estensione del criterio di Carpinteri e collaboratori per lo studio dei componenti strutturali soggetti a fatica da contatto (Capitolo 4 e 5), il criterio verrà applicato congiuntamente ad un approccio non-locale.

### 3.4 Bibliografia

- Adib H., Pluvinage G. (2003) Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life prediction in notched components. *International Journal of Fatigue* 25, 67-76.
- Amargier R., Fouvry S., Chambon L., Schwob C., Poupon C. (2010) Stress gradient effect on crack initiation in fretting using a multiaxial fatigue framework. *International Journal of Fatigue* 32, 1904-1912.
- Amrouche A., Belloula A., Benseddig N., Nait-Abdelazizi M. (2014), Comparison of the cracking energy density and the Smith-Watson-Topper parameters in predicting fretting fatigue lifetime of a steel/aluminum alloy contact. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 37, 1355-1366.
- Anes V., Reis L., Li B., De Freitas M. (2014) Crack path evaluation on HC and BCC microstructures under multiaxial cyclic loading. *International Journal of Fatigue* 58, 102-113.
- Araújo J.A., Nowell D. (1999) Analysis of pad size effects in fretting fatigue using short crack arrest methodologies. *International Journal of Fatigue* 21, 947-956.
- Araújo J.A., Nowell D. (2002) The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue. *International Journal of Fatigue* 24, 763-775.
- Araújo J.A., Nowell D., Vivacqua R.C. (2004) The use of multiaxial fatigue models to predict fretting fatigue life of components subjected to different contact stress fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27, 967-978.
- Araújo J.A., Susmel L., Taylor D., Ferro J.C.T., Mamiya E.N. (2007) On the use of the theory of critical distances and the modified Wöhler curve method to estimate fretting fatigue strength of cylindrical contacts. *International Journal of Fatigue* 29, 95-107.
- Araújo J.A., Susmel L., Taylor D., Ferro J.C.T., Ferreira J.L.A. (2008) On the prediction of highcycle fretting fatigue strength: theory of critical distances vs. hot-spot approach. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1763-1778.
- Araújo J.A., Dantas A.P., Castro F.C., Mamiya E.N., Ferreira J.L.A. (2011) On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of

- the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. *International Journal of Fatigue* 33, 1092-1100.
- Araújo J., Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) An alternative definition of the shear stress amplitude based on the maximum rectangular hull method and application to the C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 764-771.
- Araújo J.A., Castro F.C., Pommier S., Bellecave J., Mériaux J. (2015) Equivalent configurations for notch and fretting fatigue. *Frattura ed Integrità Strutturale* 9, 427-433.
- Araújo J.A., Castro F.C., Pommier S., Bellecave J., Meriaux J. (2016) On the design and test of equivalent configurations for notch and fretting fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 39, 1241-1250.
- Basquin O.H. (1910) The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American Society for Testing and Materials* 10, 625-630.
- Brown M.W., Miller K.J. (1973) A theory for fatigue failure under multi-axial stress-strain condition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 187, 745-755.
- Carpinteri A., Macha E., Brighenti R., Spagnoli A. (1999) Expected principal stress directions under multiaxial random loading – Part I (Theoretical aspects of the weight function method) e Part II (Numerical simulation and experimental assessment through the weight function method). *International Journal of Fatigue* 21, 83-96.
- Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. (2000) A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 23, 355-364.
- Carpinteri A., Spagnoli A. (2001) Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue* 23, 135-145.
- Carpinteri A., Karolczuk A., Macha E., Vantadori S. (2002) Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles. *International Journal of Fracture* 115, 87-99.

- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Multiaxial fatigue life estimation in welded joints using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 31, 188-196.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. (2013a) Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 870-883.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2013b) MRH method and modified C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. In: *Atti del XXI Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA 2013)*, Torino.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) On the use of the Prismatic Hull method in a critical plane-based multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue* 68, 159-167.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.
- Castro F.C., Araújo J.A., Pires M.S.T., Susmel L. (2015) Estimation of fretting fatigue life using a multiaxial stress-based critical distance methodology. *Frattura ed Integrità Strutturale* 9, 444-450.
- ElHaddad M.H., Dowling N.F., Topper T.H., Smith K.N. (1980) J Integral applications for short fatigue cracks at notches. *International Journal of Fracture* 16, 15-24.
- Ferré R., Fouvry S., Berthel B., Ruiz-Sabariego J.A. (2013) Stress gradient effect on the crack nucleation process of a Ti-6Al-4V titanium alloy under fretting loading: Comparison between non-local fatigue approaches. *International Journal of Fatigue* 54, 56-67.
- Findley W.N. (1959) A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME* 81, 301-306.



- Flavenot J.F., Skalli N. (1989) A critical depth criterion for the evaluation of long-life fatigue strength under multiaxial loading and a stress gradient. *In: Brown M.W., Miller K.J., editors. Biaxial and multiaxial fatigue.* Mechanical Engineering Publications, London, 355-365.
- Fouvry S., Kapsa P., Sidoroff F., Vincent L. (1998) Identification of the characteristic length scale for fatigue cracking in fretting contacts. *Journal de Physique IV* 8, 159-166.
- Fouvry S., Kapsa P., Vincent L. (2000) Multiaxial fatigue analysis of fretting contact taking into account the size effect. *In: Hoepfner D.W., Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. Fretting fatigue: current technology and practices.* ASTM STP 1367, Philadelphia, 167-182.
- Fouvry S., Elleuch K., Simeon G. (2002) Prediction of crack nucleation under partial slip fretting conditions. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 37, 549-564.
- Fouvry S., Duó P., Perruchaut P. (2004) A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage: friction, wear and crack nucleation. *Wear* 257, 916-929.
- Fouvry S., Gallien H., Berthel B. (2014) From uni- to multi-axial fretting-fatigue crack nucleation: Development of a stress-gradient-dependent critical distance approach. *International Journal of Fatigue* 62, 194-209.
- Giner E., Navarro C., Sabsabi M., Tur M., Domnguez J., Fuenmayor F.J. (2011) Fretting fatigue life prediction using the extended finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences* 53, 217-225.
- Goodman J. (1899) *Mechanics Applied to Engineering.* Longmans Green, London.
- Grubisic V., Simbürger A. (1976) Fatigue under combined out of phase multiaxial stresses. *In: Proceedings of International Conference on Fatigue Testing and Design,* Society of Environmental Engineers, London, 27.1-27.8.
- Hojjati-Talemi R., Wahab M.A. (2013) Fretting fatigue crack initiation lifetime predictor tool: Using damage mechanics approach. *Tribology International* 60, 176-186.
- Karolczuk A. (2006) Plastic strains and the macroscopic critical plane orientations under combined bending and torsion with constant and variable amplitudes. *Engineering Fracture Mechanics* 73, 1629-1652.

- Kluger K. (2015) Fatigue life estimation for 2017A-T4 and 6082-T6 aluminium alloys subjected to bending-torsion with mean stress. *International Journal of Fatigue* 80, 22-29.
- Kouanga C.T., Jones J.D., Revill I., Wormald A., Nowell D. Dwyer-Joyce R.S., Araújo A., Susmel L. (2018) On the estimation of finite lifetime under fretting fatigue loading. *International Journal of Fatigue* 112, 138-152.
- Łagoda T., Ogonowski P. (2005) Criteria of multiaxial random fatigue based on stress, strain and energy parameters of damage in the critical plane. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 36, 429-437.
- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lemaitre J., Chaboche J.L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Li J., Li C., Qiao Y., Zhang Z. (2014) Fatigue life prediction for some metallic materials under constant amplitude multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* 68, 10-23.
- Lindley T.C. (1997) Fretting fatigue in engineering alloys. *International Journal of Fatigue* 19, 39-49.
- Macha E. (1989) Simulation investigations of the position of fatigue fracture plane in materials with biaxial loads. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 20, 132-136 e 153-163.
- Mamiya E.N., Araújo J.A. (2002) Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress. *Mechanics Research Communications* 29, 141-151.
- Mamiya E.N., Araújo J.A., Castro F.C. (2009) Prismatic hull: a new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue* 31, 1144-1153.
- Marquis G.B., Karjalainen-Roikonen P. (2003) Long-life multiaxial fatigue of a nodular graphite cast iron. In: *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, a cura di A. Carpinteri, M. de Freitas e A. Spagnoli*, Elsevier, Amsterdam, 383-400.
- Matake T. (1977) An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers* 20, 257-263.

- McDiarmid D.L. (1987) Fatigue under out-of-phase bending and torsion. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 9, 457-475.
- McDiarmid D.L. (1991) A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 14, 429-453.
- Muñoz S., Navarro C., Domínguez J. (2007) Application of fracture mechanics to estimate fretting fatigue endurance curves. *Engineering Fracture Mechanics* 74, 2168-2186.
- Navarro C., Garcia M., Domínguez J. (2003) A procedure for estimating the total life in fretting fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 459-468.
- Navarro C., Domínguez J. (2004) Initiation criteria in fretting fatigue with spherical contact. *International Journal of Fatigue* 26, 1253-1262.
- Navarro C., Muñoz S., Domínguez J. (2008) On the use of multiaxial fatigue criteria for fretting fatigue life assessment. *International Journal of Fatigue* 30, 32-44.
- Navarro C., Vázquez J., Domínguez J. (2011) A general model to estimate life in notches and fretting fatigue. *Engineering Fracture Mechanics* 78, 1590-1601.
- Neuber H. (1936) Zur theorie der technischen formzahl. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A* 7, 271-281.
- Neuber H. (1958) *Theory of notch stresses*. Springer, Berlin.
- Nowell D. (1988) *An analysis of fretting fatigue*. Ph.D. thesis, Oxford University.
- Nowell D., Dini D., Hills D.A. (2006) Recent developments in the understanding of fretting fatigue. *Engineering Fracture Mechanics* 73, 207-222.
- Ostash O.P., Panasyuk V.V., Kostyk E.M. (1999) A phenomenological model of fatigue macrocrack initiation near stress concentrators. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 22, 161-172.
- Papadopoulos I.V. (1998) Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 21, 269-285.
- Peterson R.E. (1959) Notch sensitivity. In: *Metal fatigue*. Sines G. Waisman J.L. editors. McGraw-Hill, New York, 293-306.

- Pluvinage G. (1999) Hot spot and volumetric approaches to the high cycle fatigue of notched components. *Technology, Law and Insurance* 4, 145-153.
- Proudhon H., Fouvry S., Yantio G.R. (2006) Determination and prediction of the fretting crack initiation: introduction of the (P, Q, N) representation and definition of a variable process volume. *International Journal of Fatigue* 28, 707-713.
- Qylafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluvinage G. (1999) Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats. *International Journal of Fatigue* 21, 753-760.
- Sheppard S.D. (1991) Field effects in fatigue crack initiation: long life fatigue strength. *Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design* 113, 188-194.
- Susmel L., Lazzarin P. (2002) A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 25, 63-78.
- Susmel L., Taylor D. (2007) A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 30, 567-581.
- Susmel L., Taylor D. (2008) The modified Wöhler curve method applied along with the theory of critical distances to estimate finite life of notched components subjected to complex multiaxial loading path. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 31, 1047-1064.
- Susmel L. (2009) *Multiaxial Notch Fatigue: from nominal to local stress-strain quantities*. Woodhead & CRC, Cambridge.
- Susmel L., Lazzarin P. (2013) A stress-based method to predict lifetime under multiaxial fatigue loadings. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 1171-1187.
- Susmel L., Tovo R., Socie D.F. (2014) Estimating the orientation of Stage I crack paths through the direction of maximum variance of the resolved shear stress. *International Journal of Fatigue* 58, 94-101.
- Szolwinski M.P., Farris T.N. (1998) Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy. *Wear* 221, 24-36.
- Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.

- Taylor D. (2007) *The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics*. Elsevier, Oxford.
- Vantadori S., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2017) A stress gradient approach for fretting fatigue assessment of metallic structural components. *International Journal of Fatigue* 101, 1-8.
- Vázquez J., Navarro C., Domínguez J. (2014) A model to predict fretting fatigue life including residual stresses. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73, 144-151.
- Wang C., Shang D.G., Wang X.W. (2015) A new multiaxial high-cycle fatigue criterion based on the critical plane for ductile and brittle materials. *Journal of Materials Engineering and Performance* 24, 816-824.
- Westergaard H.M. (1939) Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics A* 61, 49-53.



# 4

## DETERMINAZIONE DELLA VITA A FATICA DI COMPONENTI METALLICI IN PRESENZA DI CONTATTO

---

## LIFETIME DETERMINATION OF METALLIC COMPONENTS UNDER CONTACT FATIGUE

*The present Chapter deals with the lifetime estimation for metallic structural components under contact fatigue. Such an issue is recognised as fundamental in several industrial applications, where two or more components are generally pressed in contact, and subjected to small oscillatory displacements.*

*The state-of-the-art shows how different approaches have been proposed in order to estimate fretting fatigue life. Some approaches provide that such an estimation is exclusively linked to the unstable crack propagation and, therefore, fracture mechanics concepts can be applied (Faanes, 1994; Giannakopoulos, 2000; Hattori, 2000; Mutoh, 2003).*

*Other approaches assume that the structural component failure occurs at crack nucleation stage, and are generally based on multiaxial fatigue criteria (Ruiz, 1984; Giannakopoulos, 1998; Fouvry, 2002; Sum, 2005).*

*Further approaches assume that both crack nucleation and crack propagation mechanisms have to be taken into account to estimate fatigue life (Szolwinski, 1998; Lykins, 2001; Araújo, 2002; Navarro, 2003; Navarro, 2004; Navarro, 2007; Navarro, 2008; Navarro, 2011; Giner, 2011; Vázquez, 2014).*

*In such a context, the fatigue life estimation is performed in the present Chapter by employing the multiaxial fatigue criterion by Carpinteri et al., outlined in Section 3.2.1. More precisely, such a criterion is herein proposed to be extended to life evaluation under fretting fatigue, through its joint application together with a non-local approach. In particular, four non-local approaches are*

*proposed, based on the critical distance concept, in order to take into account high stress gradients close to the contact surface. The objective of the above jointed application is to provide a simple and rapid tool for a sufficiently accurate fretting fatigue life estimation, which is of particular interest for industrial applications.*

*Finally, in order to verify the validity of the extension here proposed, some experimental data available in literature are examined. Such data are related to fretting fatigue tests conducted for cylindrical contact (Nowell, 1988; Szolwinski, 1998; Araújo, 2004; Bellecave, 2015) and spherical contact (Wittkowsky, 2000; Navarro, 2007; Vankatesh, 2001).*

## **4.1 Introduzione**

Il presente Capitolo è dedicato alla valutazione della vita a fatica in presenza di contatto per componenti strutturali metallici. Tale problema viene considerato come fondamentale in svariate applicazioni industriali, dove generalmente si hanno due o più componenti posti in contatto, soggetti a piccoli scorrimenti oscillatori.

Lo stato dell'arte mostra come diversi siano gli approcci proposti per la stima della vita a fatica. Alcuni approcci prevedono che tale stima sia legata esclusivamente al processo di propagazione instabile della fessura, e quindi vengono applicati i concetti di meccanica della frattura (Faanes, 1994; Giannakopoulos, 2000; Hattori, 2000; Mutoh, 2003).

Altri approcci assumono che la crisi del componente avvenga contestualmente alla fase di nucleazione della fessura, e sono generalmente basati su criteri di fatica multiassiale (Ruiz, 1984; Giannakopoulos, 1998; Fouvry, 2002; Sum, 2005).

Altri approcci, ancora, considerano che per la valutazione della vita a fatica debbano essere considerati entrambi i meccanismi di evoluzione della fessura, vale a dire nucleazione e propagazione (Szolwinski, 1998; Lykins, 2001; Araújo, 2002; Navarro, 2003; Navarro, 2004; Navarro, 2007; Navarro, 2008; Navarro, 2011; Giner, 2011; Vázquez, 2014).

In tale contesto, nel presente Capitolo la valutazione della vita a fatica viene condotta impiegando il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri et al., e presentato alla Sezione 3.2.1. Più precisamente, si propone di estendere tale criterio alla valutazione della vita a fatica da contatto attraverso l'applicazione congiunta con un approccio non-locale. In particolare, vengono proposti quattro



approcci non-locali, basati sul concetto della distanza critica, allo scopo di considerare gli elevati gradienti tensionali presenti in prossimità della superficie di contatto. L'obiettivo dell'applicazione congiunta di un approccio non-locale e del criterio di Carpinteri et al., è quello di fornire uno strumento semplice e di rapida applicazione per una stima sufficientemente accurata della vita a fatica da contatto, di particolare interesse nelle applicazioni industriali.

Infine, per verificare la validità dell'estensione qui proposta, vengono esaminati alcuni dati sperimentali disponibili in letteratura, relativi a prove di fatica condotte in presenza di contatto cilindrico (Nowell, 1988; Szolwinski, 1998; Araújo, 2004; Bellecave, 2015) e di contatto sferico (Wittkowsky, 2000; Navarro, 2007; Vankatesh, 2001).

## **4.2 Determinazione della vita a fatica in presenza di contatto cilindrico**

Nella presente Sezione, la valutazione della vita a fatica in presenza di contatto cilindrico viene condotta attraverso l'applicazione congiunta di approcci non-locali e del criterio di Carpinteri et al., validato attraverso l'impiego di dati sperimentali disponibili in letteratura.

### **4.2.1 Descrizione dei risultati sperimentali impiegati**

La prima campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Nowell nel 1988 (Nowell, 1988) presso l'Università di Oxford. L'apparato di prova, mostrato schematicamente in *Figura 4.1*, è composto da due pads cilindrici, compressi contro il provino da una forza normale costante,  $P$ .

Tale provino viene vincolato all'apparato di prova attraverso una ganascia fissa, mentre all'estremo opposto una ganascia mobile garantisce l'applicazione di una tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ , di ampiezza pari a  $\sigma_{B,a}$ , e con valore medio nullo (rapporto di fatica pari a -1).

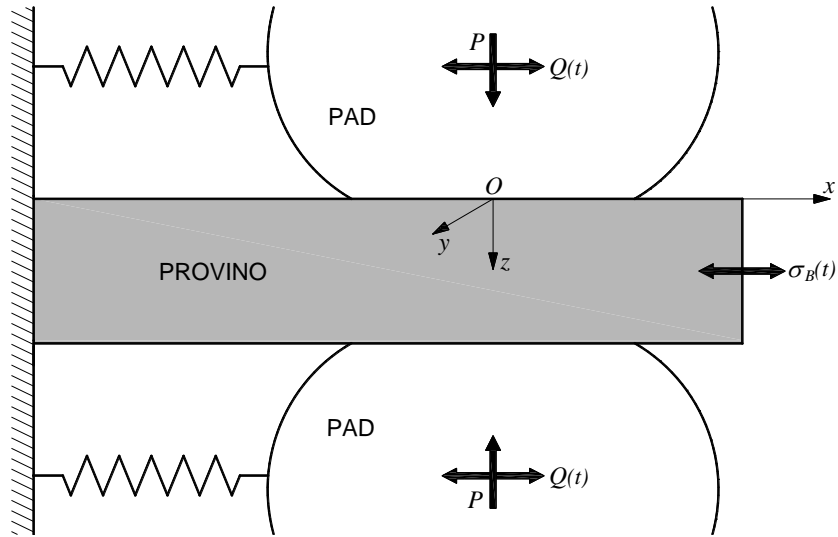


Figura 4.1 Rappresentazione schematica dell'apparato di prova.

I pads vengono collegati all'apparato di prova attraverso molle le cui rigidzze, opportunamente calibrate, garantiscono l'applicazione al provino di un carico tangenziale,  $Q(t)$ , di ampiezza pari a  $Q_a$ , e valore medio nullo, in fase con  $\sigma_B(t)$ . Le storie di carico delle sollecitazioni applicate al provino vengono riportate in Figura 4.2.

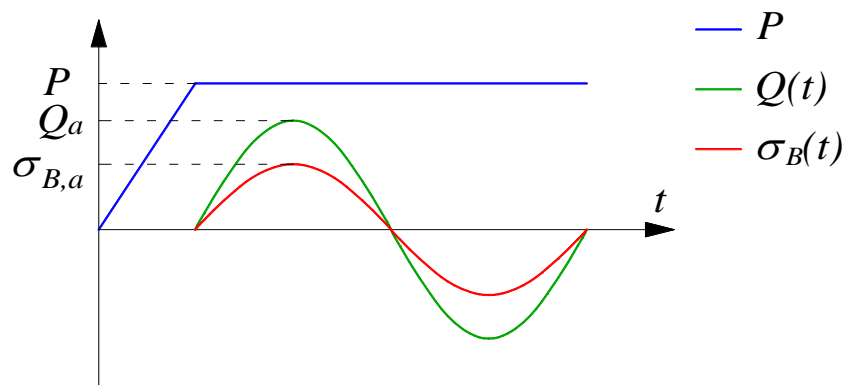


Figura 4.2 Storie di carico delle sollecitazioni applicate al provino.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Al4Cu, una lega di alluminio le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (Kouanga, 2018) e riportate in *Tabella 4.1*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 0.75.

*Tabella 4.1 Proprietà meccaniche e a fatica della lega Al4Cu.*

$E$	$\nu$	$\sigma_u$	$L$	$\sigma_{af,-1}$	$m$	$\tau_{af,-1}$	$m^*$	$N_0$
[GPa]	[-]	[MPa]	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[-]	[cicli]
74.00	0.33	500.00	0.10	124.00	-0.084	75.00	-0.110	$1(10)^7$

Vengono considerate 4 serie di prove, in ognuna delle quali è stato mantenuto fisso il valore massimo della pressione normale,  $p_0$ , il rapporto tra il valore massimo del carico tangenziale e il carico normale,  $Q_a/P$ , e il valore massimo della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ . Al fine di considerare l'effetto del gradiente tensionale sulla vita a fatica, vengono considerati diversi raggi di curvatura dei pads,  $R$ .

Tutti i test sono stati condotti in regime di scorrimento parziale (ossia  $Q < \mu P$ ), al fine di considerare la situazione più critica in termini di crisi a fatica da contatto (Madge, 2007; Araùjo 2015). In *Tabella 4.2* vengono riportate le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura,  $N_{f,exp}$ , ottenuti dall'Autore.

*Tabella 4.2 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Nowell, 1988).*

Serie	No.	$R$	$p_0$	$Q_a/P$	$\sigma_{B,a}$	$N_{f,exp}$
		[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[cicli]
1	1	50	157	0.45	92.70	1290000
	2	75	157	0.45	92.70	670000
	3	100	157	0.45	92.70	850000
	4	125	157	0.45	92.70	730000
	5	150	157	0.45	92.70	670000
2	6	37.5	143	0.45	92.70	4040000
	7	50	143	0.45	92.70	1500000
	8	75	143	0.45	92.70	800000
	9	100	143	0.45	92.70	610000
	10	125	143	0.45	92.70	1240000
	11	150	143	0.45	92.70	690000
3	12	75	143	0.45	77.20	1200000

	13	100	143	0.45	77.20	1420000
	14	125	143	0.45	77.20	1020000
4	15	125	120	0.45	61.80	1570000
	16	150	120	0.45	61.80	1230000
5	17	100	143	0.24	92.70	5060000
	18	125	143	0.24	92.70	1220000
	19	150	143	0.24	92.70	1280000

La seconda campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Szolwinski e collaboratori (Szolwinski, 1998). L'apparato di prova è analogo a quello impiegato a Nowell, mostrato in *Figura 4.1*, in cui i due pads cilindrici sono compressi contro il provino da una forza costante  $P$ . Il carico ciclico tangenziale  $Q(t)$ , applicato al provino attraverso i pads, risulta in fase con la tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ .

Sia il provino che i pads sono realizzati in Al2024-T351, una lega di alluminio tipicamente impiegata nell'industria aeronautica, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (DuQuesnay, 1986; Vantadori, 2017) e riportate in *Tabella 4.3*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 0.65.

*Tabella 4.3 Proprietà meccaniche e a fatica della lega Al2024-T351.*

$E$	$\nu$	$\sigma_u$	$L$	$\sigma_{af,-1}$	$m$	$\tau_{af,-1}$	$m^*$	$N_0$
[GPa]	[-]	[MPa]	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[-]	[cicli]
74.00	0.33	465.00	0.10	124.00	-0.078	68.20	-0.078	1(10) <sup>7</sup>

Le prove sperimentali sono realizzate in regime di scorrimento parziale, considerando diverse condizioni geometriche e di carico. In particolare, sono considerati:

- (i) tre diversi valori del raggio del pads, pari a 127 mm, 178 mm e 229 mm;
- (ii) un rapporto tra il valore massimo del carico tangenziale e il carico normale,  $Q_a/P$ , variabile nell'intervallo 0.21-0.43;
- (iii) un valore massimo della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$  variabile nell'intervallo 81.0 MPa-113.1 MPa.

In *Tabella 4.4* vengono riportate le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura,  $N_{f,exp}$ , ottenuti dagli Autori.

*Tabella 4.4 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Szolwinski, 1998).*

Serie	No.	$R$ [mm]	$p_0$ [MPa]	$Q_a / P$ [-]	$\sigma_{B,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
1	1	127	197.8	0.28	84.7	356172
	2	127	208.4	0.31	110.3	214611
	3	127	223.2	0.23	84.8	602810
	4	127	207.3	0.35	88.4	507097
	5	127	240.4	0.31	101.9	510349
	6	127	240.4	0.31	101.9	302794
	7	127	223.0	0.35	109.2	275025
	8	127	237.8	0.27	108.8	225732
	9	127	224.0	0.36	98.2	424295
	10	127	209.0	0.33	97.1	270131
2	11	178	189.2	0.27	100.0	312062
	12	178	189.2	0.27	100.0	396322
	13	178	174.2	0.38	85.8	519963
	14	178	199.9	0.34	113.1	431062
	15	178	201.2	0.21	85.2	600638
	16	178	201.2	0.21	85.2	684658
	17	178	203.6	0.31	99.4	513985
	18	178	187.9	0.27	84.7	555830
	19	178	174.3	0.36	97.4	418911
	20	178	192.1	0.34	106.4	195200
	21	178	174.9	0.38	110.6	304030
3	22	229	155.7	0.43	111.7	212243
	23	229	155.3	0.37	112.9	224711
	24	229	166.3	0.32	97.0	697722
	25	229	166.9	0.32	85.4	792621
	26	229	177.3	0.24	81.8	673075
	27	229	177.3	0.25	81.8	655655
	28	229	153.4	0.31	81.0	790864
	29	229	153.8	0.26	82.9	697565
	30	229	176.4	0.34	109.5	293281
	31	229	165.8	0.33	110.8	453080

La terza campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Araújo e collaboratori (Araújo, 2004). L'apparato di prova è simile a quello impiegato da Nowell e Szolwinski, tuttavia il carico ciclico tangenziale  $Q(t)$  applicato ai pads non viene applicato attraverso un sistema di molle, ma bensì attraverso un attuatore indipendente. Ciò permette di poter applicare carichi ciclici  $Q(t)$  sfasati rispetto alla tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ . Nonostante ciò, nella presente campagna di prove sperimentali le due sollecitazioni cicliche sono perfettamente in fase.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Ti-6Al-4V, una lega di titanio impiegata nell'industria spaziale e in ambito medico, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (Kouanga, 2018) e riportate in *Tabella 4.5*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 0.55.

*Tabella 4.5 Proprietà meccaniche e a fatica della lega Ti-6Al-4V.*

$E$	$\nu$	$\sigma_u$	$L$	$\sigma_{af,-1}$	$m$	$\tau_{af,-1}$	$m^*$	$N_0$
[GPa]	[-]	[MPa]	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[-]	[cicli]
116.00	0.34	978.00	0.015	475.70	-0.108	388.30	-0.045	$2(10)^6$

Le prove sperimentali sono eseguite mantenendo costante il valore massimo della pressione normale alla superficie di contatto,  $p_0$ , il rapporto tra il valore massimo del carico tangenziale e il carico normale,  $Q_a/P$ , e il valore massimo della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , variando tuttavia il raggio dei pads,  $R$ .

In *Tabella 4.6* vengono riportate le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura,  $N_{f,exp}$ , ottenuti dagli Autori.

*Tabella 4.6 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Araújo, 2004).*

No.	$R$	$p_0$	$Q_a/P$	$\sigma_{B,a}$	$N_{f,exp}$
	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[cicli]
1	37.5	650	0.16	280	521000
2	50	650	0.16	280	374000
3	60	650	0.16	280	196000
4	70	650	0.16	280	173000

La quarta campagna di prove sperimentali considerate è quella condotta da Bellecave (Bellecave, 2015). L'apparato di prova è simile a quello utilizzato da Nowell in cui, tuttavia, al provino viene applicata una tensione ciclica media,  $\sigma_{B,m}$ , prima che questo venga compresso dai pads (rapporto di fatica pari a 0). Tale procedura permette di tenere in considerazione l'effetto del valore medio della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , senza tuttavia influenzare la distribuzione dei carichi in corrispondenza della superficie di contatto. Risultano, quindi, ancora valide le espressioni riportate nella Sezione 2.4 per il calcolo delle componenti di tensione del tensore degli sforzi.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Ti-6Al-4V, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono riportate in *Tabella 4.5*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 0.5. Nelle prove sperimentali condotte da Bellecave, viene fatto variare il raggio dei pads,  $R$ .

In *Tabella 4.7* vengono riportate, nel dettaglio, le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura,  $N_{f,exp}$ , ottenuti dall'Autore.

*Tabella 4.7 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Bellecave, 2015).*

Serie	No.	$R$ [mm]	$p_0$ [MPa]	$Q_a / P$ [-]	$\sigma_{B,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
1	1	20	700	0.28	198.8	358681
	2	20	700	0.25	179.2	593547
	3	20	700	0.27	179.2	509677
	4	20	700	0.26	179.2	775445
	5	20	700	0.28	190.4	645763
2	6	20	500	0.23	340.0	225780
	7	20	500	0.25	380.0	163840
	8	20	500	0.23	320.0	478632
	9	20	500	0.23	320.0	488632
	10	20	500	0.23	310.0	723487
3	11	70	500	0.23	300.0	168266
	12	70	500	0.23	280.0	248790
	13	70	500	0.23	240.0	379841
	14	70	500	0.25	190.0	583981
	15	70	500	0.23	220.0	635177
	16	70	500	0.23	210.0	696665

---

17	70	500	0.23	190.0	707132
18	70	500	0.24	180.0	971557

---

I risultati delle prove sperimentali presentate in questa Sezione vengono, nel seguito, impiegati per la validazione di diversi approcci non-locali applicati congiuntamente al criterio di Carpinteri e collaboratori.

#### **4.2.2 Applicazione del criterio di Carpinteri et al. combinato con approcci non-locali: contatto cilindrico**

Il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013; Araújo, 2014; Carpinteri, 2015) viene nel seguito applicato congiuntamente ad approcci non-locali per tenere in considerazione, nella stima della vita a fatica, gli elevati gradienti tensionali in presenza di contatto. In particolare i dati di input del criterio, ossia le componenti del tensore degli sforzi, vengono determinate impiegando le formulazioni per contatto cilindrico riportate nella Sezione 2.4.1.

Vengono impiegati quattro approcci non-locali:

- (i) approccio non-locale 1: si considerano tre diversi percorsi, di lunghezza costante, per individuare la posizione del punto critico in cui applicare il criterio;
- (ii) approccio non-locale 2: viene proposta una nuova formulazione per la definizione di una distanza critica variabile, funzione del gradiente tensionale in prossimità della superficie;
- (iii) approccio non-locale 3: viene proposta una nuova formulazione per la determinazione della vita a fatica, basata sul *Line Method* della Teoria della Distanza Critica;
- (iv) approccio non-locale 4: viene proposta una nuova formulazione per la determinazione della vita a fatica, basata sull'*Area Method* della Teoria della Distanza Critica.

##### *4.2.2.1 Approccio non-locale 1*

La stima della vita a fatica viene condotta in un punto materiale,  $C$ , considerato come critico, applicando il criterio di Carpinteri et al. ad una certa distanza dall'*Hot-spot*,  $H$ , assunta costante. Tale distanza è assunta pari a  $L/2$ , essendo  $L$  la



lunghezza intrinseca del materiale proposta da ElHaddad (ElHaddad, 1980) e riportata in Eq.(3.16).

In particolare, vengono considerati tre diversi percorsi (Figura 4.3):

- (i) percorso normale: il punto critico è assunto ad una distanza pari a  $L/2$  da  $H$ , misurata perpendicolarmente alla superficie di contatto. Tale approccio corrisponde al *Point Method* della Teoria della Distanza Critica proposta da Taylor;
- (ii) percorso inclinato: il punto critico è assunto ad una distanza pari a  $L/2$  da  $H$ , misurata lungo una retta inclinata di  $45^\circ$  rispetto all'asse  $x$ ;
- (iii) percorso curvo: il punto critico è assunto ad una distanza pari a  $L/2$  da  $H$ , misurata lungo una linea curva normale, in ognuno dei suoi punti, alla direzione della tensione principale massima,  $\sigma_1$ .

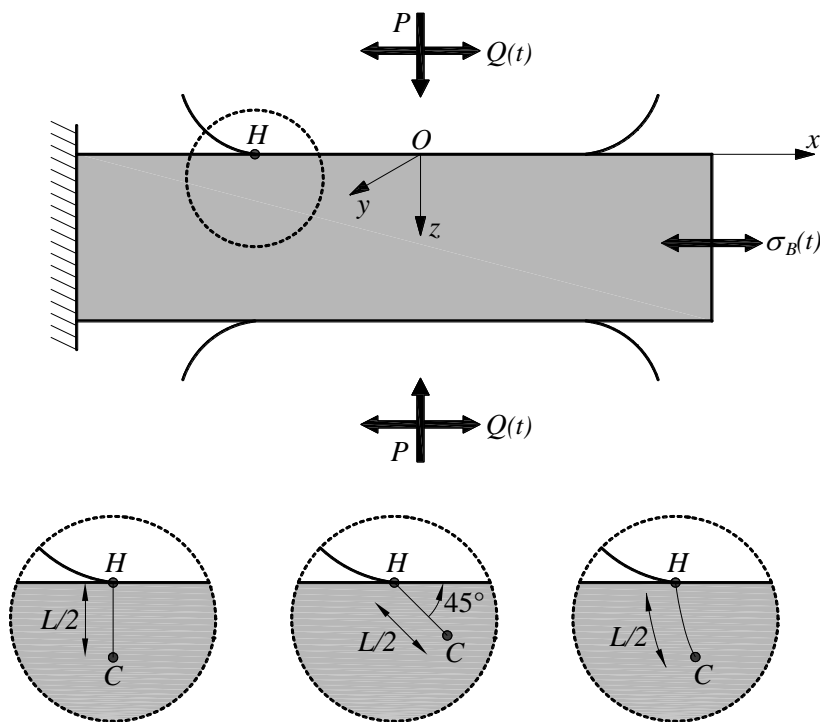


Figura 4.3 Approccio non-locale 1: valutazione della distanza critica.

Individuata la posizione del punto critico,  $C$ , attraverso l'impiego di uno dei tre percorsi di cui sopra, il tensore degli sforzi in tale punto viene determinato in accordo con quanto riportato al Capitolo 2, e il numero di cicli a rottura,  $N_{f,cal}$ , viene stimato risolvendo iterativamente l'Eq.(3.14).

Al fine di valutare l'accuratezza di tale approccio non-locale per la valutazione del punto critico, applicato congiuntamente al criterio di Carpinteri et al., per la valutazione della vita a fatica, vengono considerati i dati sperimentali riportati nella Sezione 4.2.1. L'accuratezza viene valutata attraverso l'impiego del metodo dell'errore dello scarto quadratico medio (Łagoda, 2014). In particolare, il valore dell'errore dello scarto quadratico medio logaritmico viene calcolato come segue:

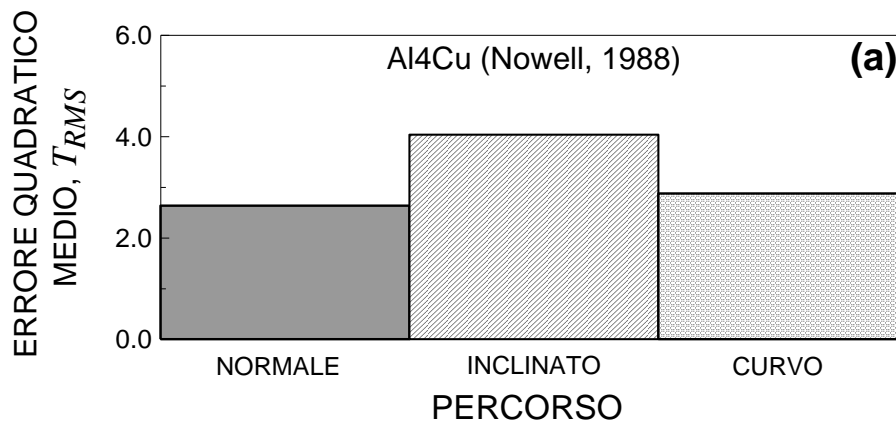
$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^j \log^2 \left( \frac{N_{f,exp}}{N_{f,cal}} \right)}{j}} \quad (4.1)$$

dove  $j$  indica il numero totale di dati analizzati. L'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , è determinato dalla seguente espressione:

$$T_{RMS} = 10^{E_{RMS}} \quad (4.2)$$

Un errore quadratico medio pari a 1 indica perfetta correlazione tra vita a fatica sperimentale e quella determinata analiticamente.

In *Figura 4.4* viene riportato il valore dell'errore quadratico medio valutato per i tre percorsi considerati, per ciascuna campagna di prove sperimentali presentata alla Sezione 4.2.1.



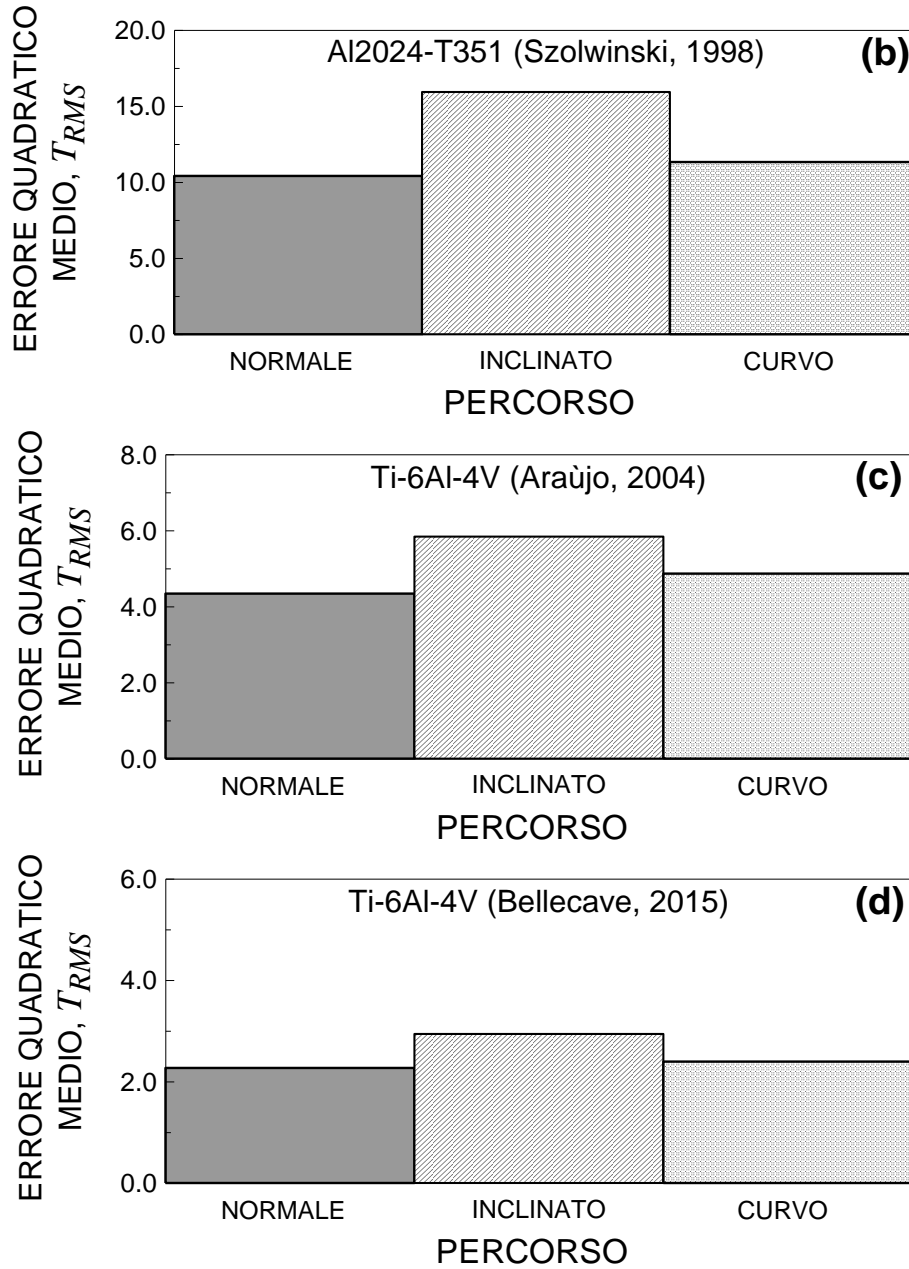


Figura 4.4 Approccio non-locale 1: errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , al variare del percorso considerato per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).

Dall'analisi condotta emerge come l'accordo tra risultati determinati sperimentalmente e analiticamente non è soddisfacente, indipendentemente dalla prova sperimentale analizzata e dal percorso considerato. In particolare, è possibile affermare che, quando la distanza critica è costante e funzione delle sole proprietà del materiale, il criterio proposto da Carpinteri e collaboratori fornisce risultati troppo conservativi e piuttosto dispersi rispetto ai valori di vita a fatica ottenuti sperimentalmente.

#### 4.2.2.2 Approccio non-locale 2

La stima della vita a fatica viene condotta in un punto,  $C$ , considerato come critico (analogamente all'approccio non-locale 1), applicando il criterio di Carpinteri et al. ad una certa distanza dall'*Hot-spot*,  $H$ . Tale distanza, misurata perpendicolarmente alla superficie di contatto, risulta tuttavia non essere considerata costante.

In particolare, Fouvry e collaboratori (Fouvry, 2014) proposero, nella determinazione della distanza critica, di tenere in considerazione non solo le caratteristiche a fatica del materiale, ma anche l'effetto prodotto dal gradiente tensionale in prossimità della superficie di contatto. Tale gradiente infatti, nonostante tenda a ridursi molto rapidamente con la profondità, risulta avere un effetto molto rilevante in prossimità della superficie di contatto, dove generalmente la fessura tende a nuclearsi.

In tale contesto, al fine di migliorare l'accuratezza del criterio, viene nel seguito presentata una proposta di nuova formulazione per la determinazione di una distanza critica,  $d_c$ , funzione, oltre che delle caratteristiche a fatica del materiale, anche del gradiente tensionale.

Si consideri la configurazione geometrica riportata in *Figura 4.5* e si definisca il gradiente della tensione longitudinale,  $\sigma_x$ , in prossimità dell'*Hot-spot* come segue:

$$\nabla \sigma_x = \frac{\sigma_{x,H} - \sigma_x(x = -a, z = L/2)}{L/2} \quad (4.3)$$

dove  $\sigma_{x,H}$  rappresenta il valore della tensione longitudinale  $\sigma_x$  in corrispondenza dell'*Hot-spot*. Dall'*Eq.(4.3)* è evidente come il valore del gradiente così

determinato risulta essere funzione non solo dello stato tensionale, ma anche del materiale considerato, attraverso la lunghezza intrinseca  $L$ .

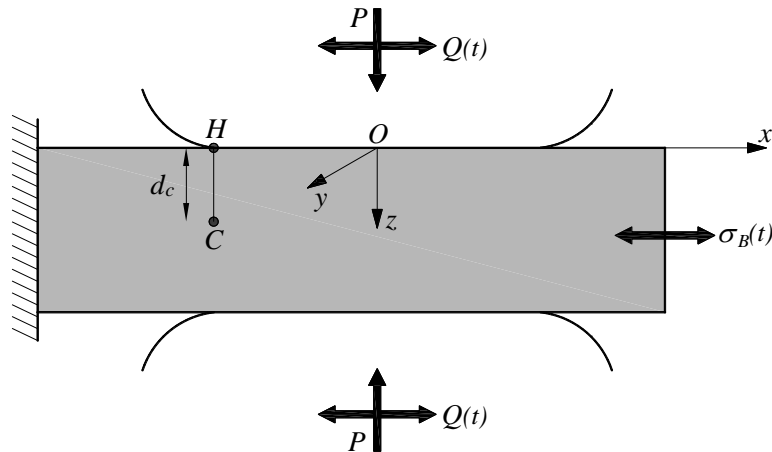


Figura 4.5 Approccio non-locale 2: valutazione della distanza critica.

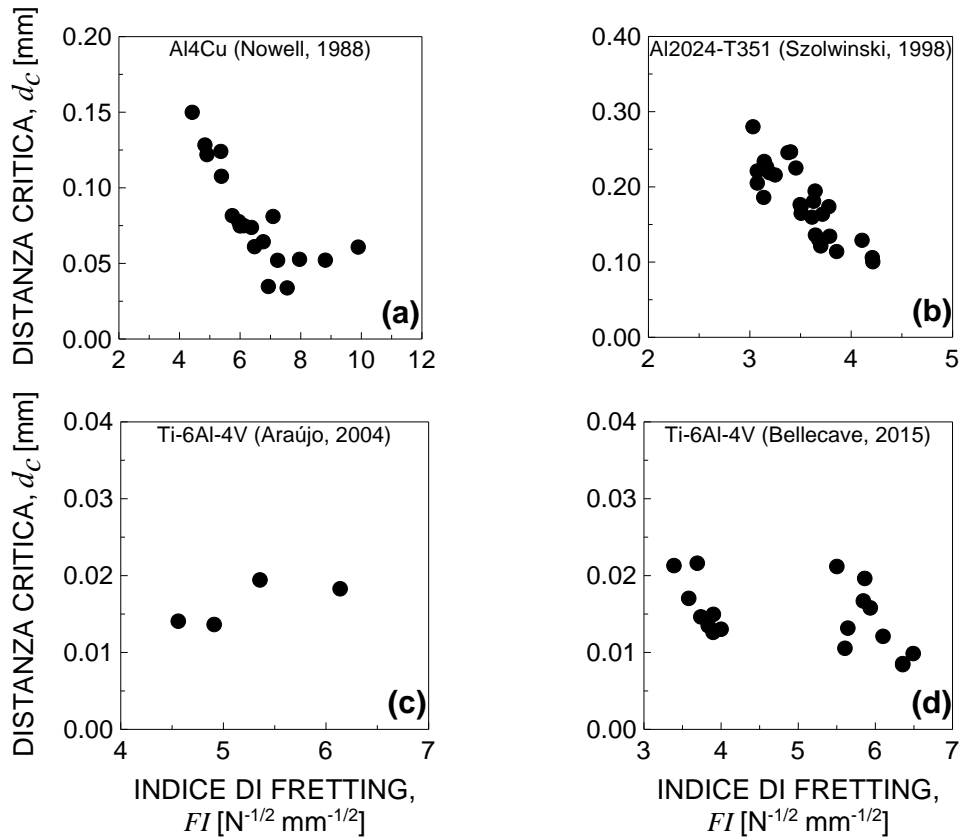
L'espressione della distanza critica, funzione del gradiente tensionale, viene nel seguito determinata, per ognuno dei materiali analizzati nelle prove sperimentali considerate, attraverso una procedura di calibrazione. Più precisamente, per ognuno dei provini analizzati viene determinata una distanza critica ottimale,  $d_{c,opt}$ , al fine di minimizzare l'errore quadratico medio  $T_{RMS}$  presentato nella Sezione precedente (ossia,  $d_{c,opt}$  viene determinata al fine di ottenere  $T_{RMS} = 1$ ). La distanza critica ottimale viene misurata perpendicolarmente alla superficie di contatto (Figura 4.5), essendo tale direzione quella cui è associato il più elevato gradiente tensionale nella fatica da contatto (Navarro, 2008).

Si definisca, quindi, un Indice di Fretting,  $FI$ , calcolato come segue:

$$FI = \frac{\nabla \sigma_x}{\sigma_{x,H}} \sqrt{\frac{R}{P}} \quad (4.4)$$

Tale indice permette di tenere in considerazione, oltre alle caratteristiche del carico, anche le caratteristiche geometriche e del materiale impiegato nella configurazione analizzata.

In *Figura 4.6* è riportato l'andamento della distanza critica ottimale  $d_{c,opt}$  in funzione dell'Indice di Fretting  $FI$ , per ciascuna campagna di prove sperimentali riportata alla Sezione 4.2.1.



*Figura 4.6* Approccio non-locale 2: andamento della distanza critica ottimale,  $d_{c,opt}$  in funzione dell'Indice di Fretting  $FI$ , per: (a) *Al4Cu* (Nowell, 1988); (b) *Al2024-T351* (Szolwinski, 1998); (c) *Ti-6Al-4V* (Araújo, 2004); (d) *Ti-6Al-4V* (Bellecave, 2015).

È possibile notare come, indipendentemente dai carichi applicati e dal raggio dei pads, vi sia un andamento pressoché lineare tra  $d_{c,opt}$  e  $FI$ , per ognuno dei materiali considerati.

In tale contesto, seguendo un approccio basato sul gradiente tensionale simile a quello di Fouvry (Fouvry, 2014), viene proposta la definizione di una relazione lineare tra la distanza critica,  $d_c$ , e l'Indice di Fretting  $FI$ , cioè:

$$d_c = \begin{cases} L/2 & \text{per } \alpha FI + \beta \leq L/2 \\ \alpha FI + \beta & \text{per } \alpha FI + \beta > L/2 \end{cases} \quad (4.5)$$

in cui  $\alpha$  e  $\beta$  sono due parametri funzione del materiale considerato. La limitazione al valore minimo di  $L/2$  per la distanza critica,  $d_c$ , si rende necessaria, come evidenziato da Fouvry e collaboratori (Fouvry, 2014), per evitare di ottenere valori della distanza critica tendente a zero per valori dell'Indice di Fretting  $FI$  contenuti.

Tali parametri vengono determinati attraverso l'impiego di una procedura di regressione lineare condotta su una serie di prove sperimentali (definita serie di calibrazione) per ogni materiale considerato, e validata determinando la vita a fatica,  $N_{f,cal}$ , per le serie rimanenti. Più precisamente, la determinazione dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  si compone delle seguenti fasi:

- (i) determinazione, per ogni provino analizzato, della distanza critica ottimale,  $d_{c,opt}$ , tale per cui l'errore quadratico medio  $T_{RMS}$  risulta pari a 1;
- (ii) determinazione, per ogni provino analizzato, dell'Indice di Fretting,  $FI$ , impiegando l'Eq.(4.4);
- (iii) rappresentazione dei risultati ottenuti in un piano  $d_{c,opt} - FI$  per la serie di calibrazione;
- (iv) determinazione dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , attraverso l'impiego di una procedura di regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati, per tale serie di calibrazione.

I valori dei parametri così determinati vengono riportati in *Tabella 4.8*, per ognuno dei materiali considerati.

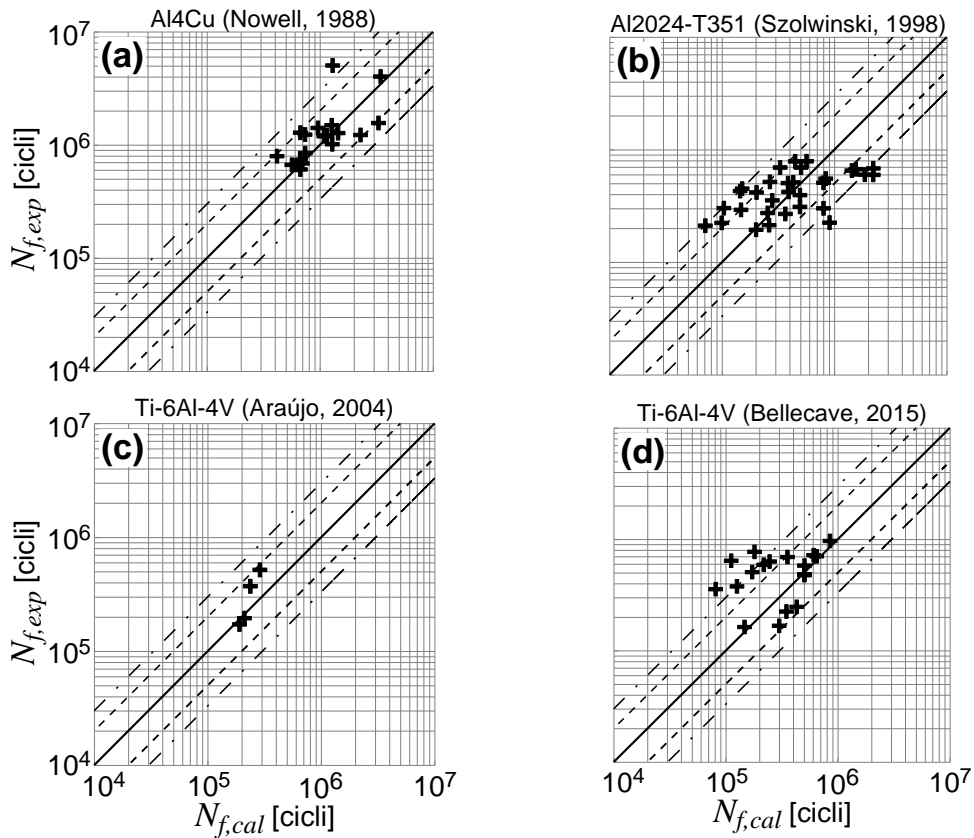
*Tabella 4.8 Valori dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .*

Materiale	$\alpha$ [cicli/MPa]	$\beta$ [cicli]
Al4Cu	-0.0399	0.3216
Al2024-T351	-0.1229	0.6131
Ti-6Al-4V	-0.0011	0.01579

I valori di tali parametri, sostituiti all'interno dell'Eq.(4.5), permettono di calcolare la distanza critica,  $d_c$ , ossia determinare la posizione del punto critico. La

stima della vita a fatica può quindi essere condotta impiegando il criterio di Carpinteri et al., stimando il numero di cicli a rottura,  $N_{f,cal}$ .

In *Figura 4.7* viene riportato, per ognuna delle campagne sperimentali analizzate, il confronto tra vita a fatica determinata sperimentalmente e analiticamente, in cui la linea continua indica perfetta correlazione tra i dati ( $N_{f,cal}/N_{f,exp}$  pari a 1), le linee tratteggiate indicano la banda di dispersione 2 ( $N_{f,cal}/N_{f,exp}$  pari a 0.5 e 2), e le linee tratto-punto indicano la banda di dispersione 3 ( $N_{f,cal}/N_{f,exp}$  pari a 0.33 e 3).



*Figura 4.7* Approccio non-locale 2: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici,  $N_{f,cal}$ , e i dati sperimentali,  $N_{f,exp}$ , per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).



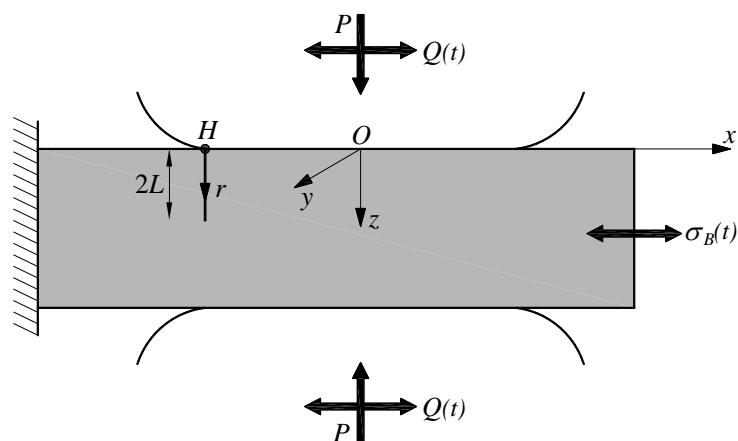
Risulta evidente come l'accordo tra dati sperimentali e i risultati analitici risulta soddisfacente per ognuno dei materiali analizzati. In particolare, per i provini realizzati in Al4Cu (*Figura 4.7(a)*) l'89% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 95% nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Al2024-T351 (*Figura 4.7(b)*) il 71% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 90% nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Araújo e collaboratori (*Figura 4.7(c)*), il 100% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2. Infine, per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Bellecave (*Figura 4.7(d)*), il 61% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2 mentre l'83% nella banda di dispersione 3

#### 4.2.2.3 Approccio non-locale 3

La stima della vita a fatica viene condotta applicando il criterio di Carpinteri et al. congiuntamente al *Line Method* (LM) della Teoria della Distanza Critica proposta da Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007).

Come descritto alla Sezione 3.2.2.1, il LM prevede che venga condotta una procedura di media di una componente tensionale lungo una linea, di lunghezza costante e pari a  $2L$ , essendo  $L$  la lunghezza intrinseca di ElHaddad (*Eq.(3.16)*).

In particolare, si consideri la configurazione riportata in *Figura 4.8*, in cui tale linea viene misurata, a partire dall'*Hot-spot*,  $H$ , perpendicolarmente alla superficie di contatto.



*Figura 4.8* Approccio non-locale 3: valutazione della distanza critica.

Viene proposto che la componente tensionale, rispetto alla quale eseguire la procedura di media, sia l'ampiezza della tensione normale equivalente,  $N_{a,eq}$ , determinata in accordo con l'Eq.(3.12). Più precisamente, per ogni punto (individuato dalla coordinata  $r$ , Figura 4.8) appartenente alla suddetta linea, viene determinata  $N_{a,eq}$  e, conseguentemente, il valore medio,  $\bar{N}_{a,eq}$  :

$$\bar{N}_{a,eq} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} N_{a,eq}(r) dr \quad (4.6)$$

In Figura 4.9 è riportato l'andamento del numero di cicli a fatica,  $N_{f,exp}$ , ottenuto sperimentalmente in funzione di  $\bar{N}_{a,eq}$ , per ciascuna campagna di prove sperimentali riportata alla Sezione 4.2.1.

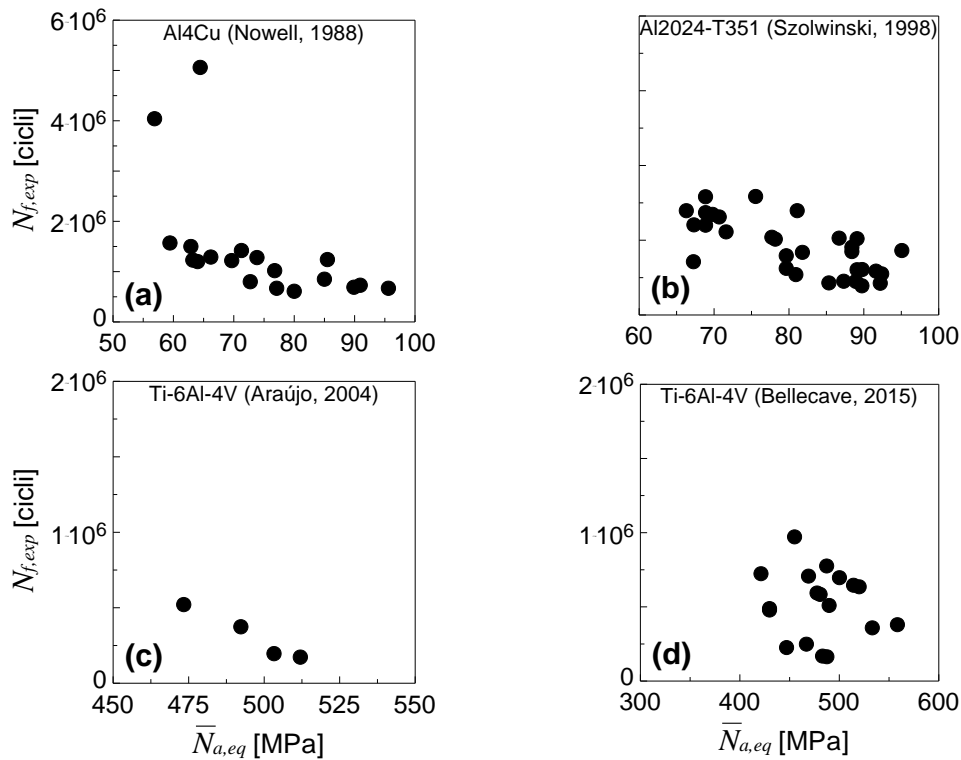


Figura 4.9 Approccio non-locale 3: andamento del numero di cicli determinato sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).

È interessante notare come, indipendentemente dai carichi applicati e dal raggio dei pads considerati, vi sia un andamento pressoché lineare tra  $\bar{N}_{a,eq}$  e  $N_{f,exp}$ , e ciò risulta osservabile per ognuno dei materiali considerati.

Viene quindi proposta la determinazione diretta della vita a fatica,  $N_{f,cal}$ , attraverso l'impiego di una relazione lineare con il valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , esprimibile in modo analogo a quanto riportato in *Eq.(4.5)*:

$$N_{f,cal} = \alpha_{LM} \bar{N}_{a,eq} + \beta_{LM} \quad (4.7)$$

dove  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$  sono due parametri funzione del materiale considerato. L'obiettivo di tale approccio è quello di fornire una formulazione semplice e di rapida applicazione, utile per una stima diretta della vita a fatica in generiche applicazioni industriali.

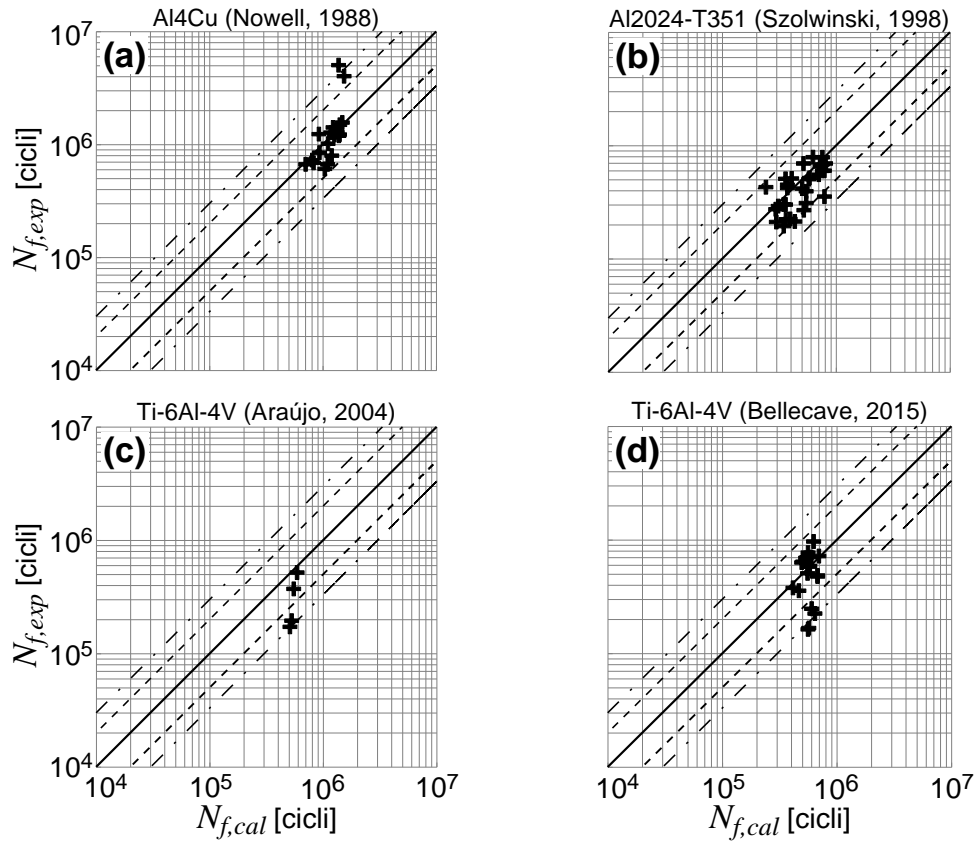
Il valore dei parametri  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$  viene determinato, analogamente all'approccio non-locale 2, attraverso l'impiego di una procedura di regressione lineare condotta sulla serie di calibrazione di ogni materiale considerato, e validata determinando  $N_{f,cal}$  per le serie rimanenti. I valori di tali parametri vengono riportati in *Tabella 4.9*, per ognuno dei materiali considerati.

*Tabella 4.9 Valori dei parametri  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$ .*

Materiale	$\alpha_{LM}$ [cicli/MPa]	$\beta_{LM}$ [cicli]
Al4Cu	-21424.60	2749982
Al2024-T351	-19598.53	2104098
Ti-6Al-4V	-2049.77	1556696

I valori di tali parametri, sostituiti all'interno dell'*Eq.(4.7)*, permettono quindi di stimare direttamente il valore del numero di cicli a rottura per ogni prova sperimentale considerata.

In *Figura 4.10* viene riportato, per ogni campagna sperimentale analizzata, il confronto tra vita a fatica determinata sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , e analiticamente,  $N_{f,cal}$ .



*Figura 4.10* Approccio non-locale 3: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici,  $N_{f,cal}$ , e i dati sperimentali,  $N_{f,exp}$ , per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).

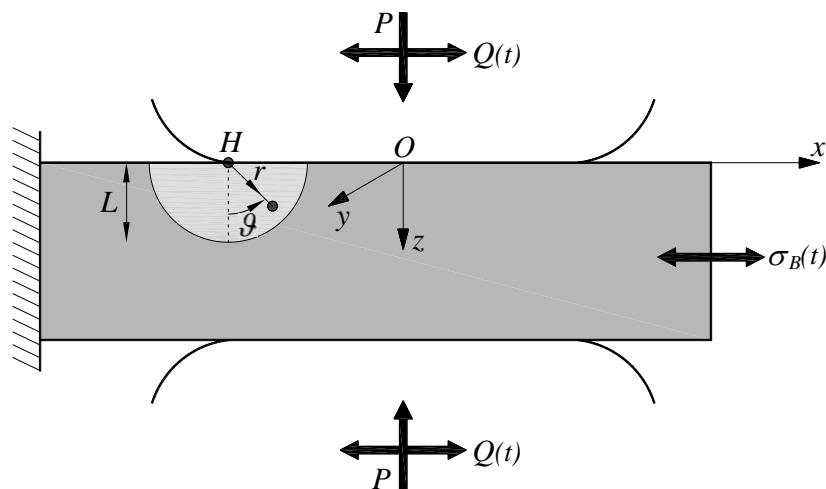
Appare evidente come tali confronti siano abbastanza soddisfacenti, per ognuno dei materiali considerati. In particolare, per i provini realizzati in Al4Cu (*Figura 4.10(a)*) l'89% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 95% nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Al2024-T351 (*Figura 4.10(b)*) il 96% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 100% nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Ti-6Al-4V,

testati da Araújo e collaboratori (*Figura 4.10(c)*), il 50% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 100% nella banda di dispersione 3. Infine, per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Bellecave (*Figura 4.10(d)*), il 78% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre l'89% nella banda di dispersione 3.

#### 4.2.2.4 Approccio non-locale 4

La stima della vita a fatica viene condotta applicando il criterio di Carpinteri et al. congiuntamente all'*Area Method* (AM) della Teoria della Distanza Critica proposta da Taylor.

Come descritto alla Sezione 3.2.2.1, l'AM prevede che venga condotta una procedura di media di una componente tensionale su una superficie semi-circolare, centrata nell'*Hot-spot*  $H$  e di raggio  $L$  (lunghezza intrinseca di ElHaddad, *Eq.(3.16)*). La configurazione geometrica considerata è riportata in *Figura 4.11*.



*Figura 4.11* Approccio non-locale 4: valutazione della distanza critica.

Si propone, analogamente all'approccio non-locale 3, che la componente tensionale, rispetto alla quale eseguire la procedura di media, sia l'ampiezza della tensione normale equivalente,  $N_{a,eq}$ , determinata in accordo con l'*Eq.(3.14)*. Più precisamente, per ogni punto (individuato dalle coordinate  $r$  e  $\theta$ , *Figura 4.11*)

appartenente alla suddetta superficie, viene determinata l'ampiezza della tensione normale equivalente  $N_{a,eq}$  e, conseguentemente, il valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , viene calcolato in accordo con l'Eq.(3.20):

$$\bar{N}_{a,eq} = \frac{4}{\pi L^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^L N_{a,eq}(\vartheta, r) r dr d\vartheta \quad (4.8)$$

In Figura 4.12 è riportato l'andamento del numero di cicli a fatica,  $N_{f,exp}$ , ottenuto sperimentalmente in funzione di  $\bar{N}_{a,eq}$ , per ciascuna campagna di prove sperimentali analizzate.

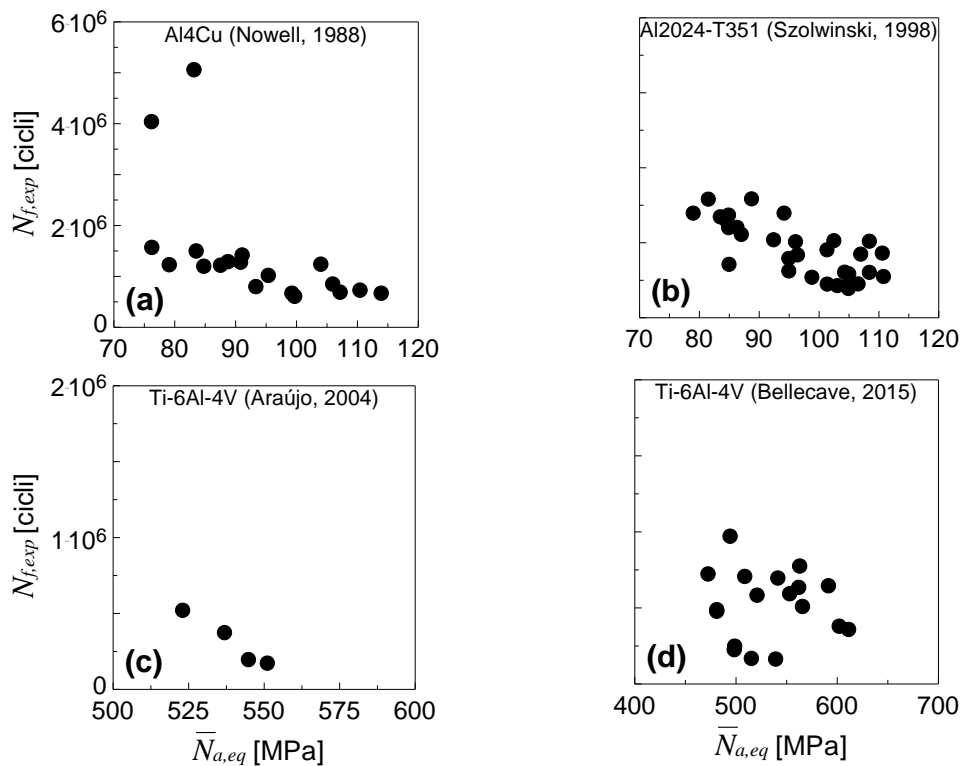


Figura 4.12 Approccio non-locale 4: andamento del numero di cicli determinato sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).

Analogamente all'approccio non-locale 3, è possibile notare l'andamento pressoché lineare tra  $\bar{N}_{a,eq}$  e  $N_{f,exp}$ , indipendentemente dalle condizioni al contorno della prova, e ciò risulta osservabile per ognuno dei materiali considerati. In tale contesto, anche nel presente approccio, viene proposta la determinazione diretta della vita a fatica,  $N_{f,cal}$ , attraverso l'impiego di una relazione lineare con il valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , esprimibile in modo analogo all'Eq.(4.7):

$$N_{f,cal} = \alpha_{AM} \bar{N}_{a,eq} + \beta_{AM} \quad (4.9)$$

dove  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$  sono due parametri funzione del materiale considerato. Al pari dell'approccio non-locale 3, l'obiettivo del presente approccio è quello di fornire uno strumento, semplice e di rapida applicazione, per i progettisti impegnati nella valutazione della vita a fatica in presenza di contatto.

I valori dei parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$ , determinati attraverso l'impiego della procedura di regressione lineare presentata alla Sezione 4.2.2.2, vengono riportati in *Tabella 4.10*, per ognuno dei materiali considerati.

*Tabella 4.10 Valori dei parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$ .*

Materiale	$\alpha_{AM}$ [cicli/MPa]	$\beta_{AM}$ [cicli]
Al4Cu	-20007.69	2993978
Al2024-T351	-11584.68	1561212
Ti-6Al-4V	-2269.84	1736598

I valori di tali parametri, sostituiti all'interno dell'Eq.(4.9), permettono quindi di stimare il valore del numero di cicli a rottura per ogni prova sperimentale considerata. In *Figura 4.13* viene riportato, per ognuna delle campagne sperimentali analizzate, il confronto tra vita a fatica determinata sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , e analiticamente,  $N_{f,cal}$ .

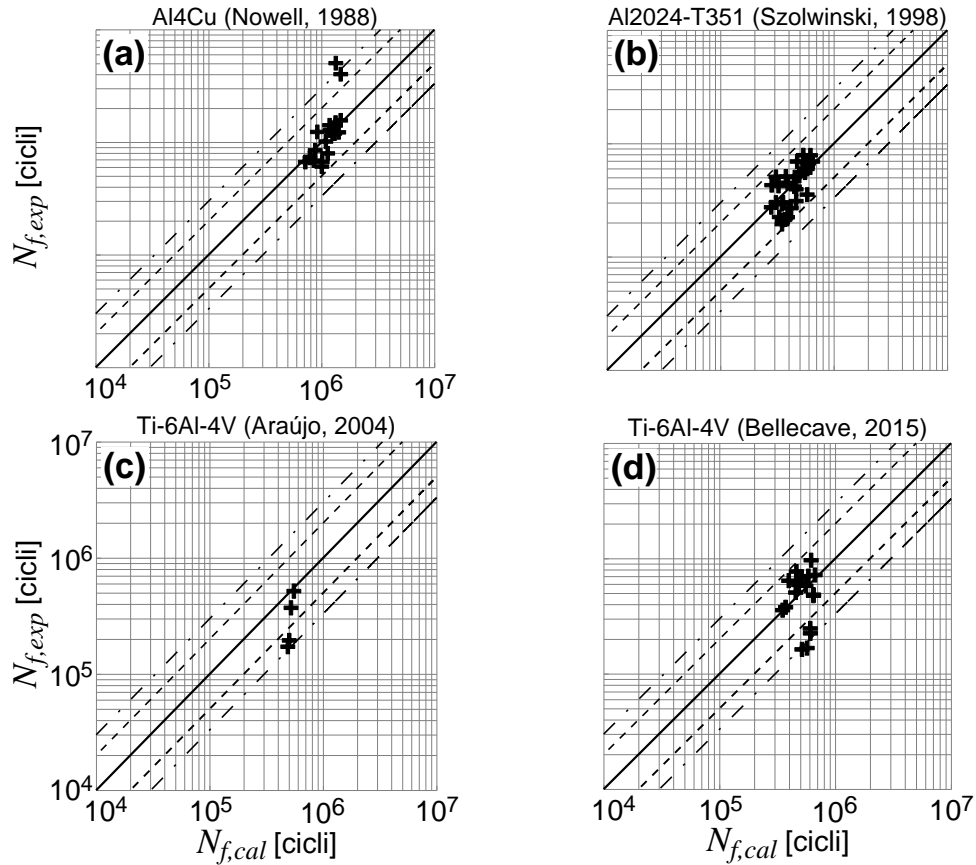


Figura 4.13 Approccio non-locale 4: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici,  $N_{f,cal}$  e i dati sperimentali,  $N_{f,exp}$ , per: (a) Al4Cu (Nowell, 1988); (b) Al2024-T351 (Szolwinski, 1998); (c) Ti-6Al-4V (Araújo, 2004); (d) Ti-6Al-4V (Bellecave, 2015).

Anche per il presente approccio non-locale, appare evidente come tali confronti siano abbastanza soddisfacenti, per ognuno dei materiali considerati. In particolare, per i provini realizzati in Al4Cu (Figura 4.13(a)), l'89% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 95% nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Al2024-T351 (Figura 4.13(b)) il 100% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2. Per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Araújo e collaboratori (Figura 4.13(c)), il 50% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 100% nella banda di dispersione 3. Infine, per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Bellecave (Figura 4.13(d)), il 78% dei



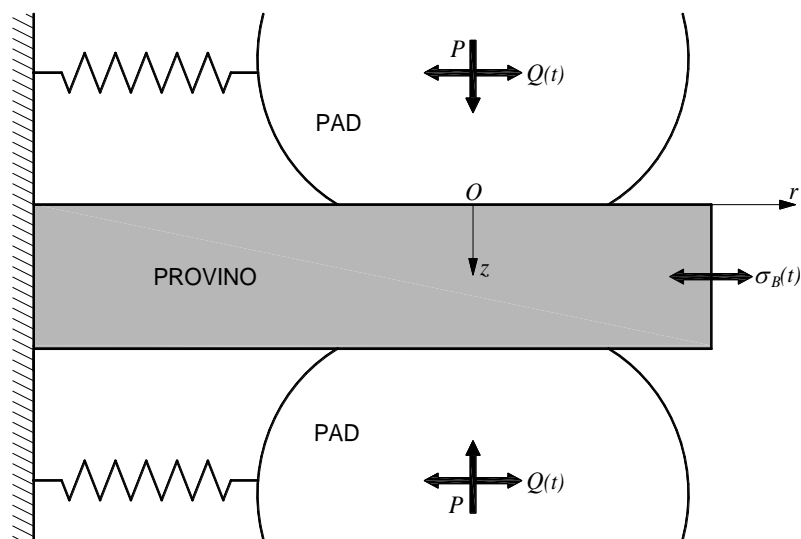
risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre l'89% nella banda di dispersione 3.

### 4.3 Determinazione della vita a fatica in presenza di contatto sferico

Nella presente Sezione, la valutazione della vita a fatica in presenza di contatto sferico viene condotta attraverso l'applicazione congiunta di approcci non-locali e del criterio di Carpinteri et al., validato attraverso l'impiego di dati sperimentali disponibili in letteratura.

#### 4.3.1 Descrizione dei risultati sperimentali impiegati

La prima campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Wittkowsky e collaboratori (Wittkowsky, 2000). L'apparato di prova, analogo a quello impiegato da Nowell per contatto cilindrico, è mostrato schematicamente in *Figura 4.14*.



*Figura 4.14* Rappresentazione schematica dell'apparato di prova.

Il provino viene fissato all'apparato di prova, ad un estremo, e ad un attuatore, all'altro estremo, attraverso un sistema di bulloni. Tale attuatore permette di

applicare al provino una tensione ciclica,  $\sigma_B(t)$ , di ampiezza pari a  $\sigma_{B,a}$  e con valore medio nullo (rapporto di fatica pari a -1). I pads vengono collegati all'apparato di prova attraverso molle le cui rigidità, opportunamente calibrate, garantiscono l'applicazione al provino di un carico tangenziale  $Q(t)$ , di ampiezza pari a  $Q_a$  e valore medio nullo, in fase con  $\sigma_B(t)$ . Le storie di carico delle sollecitazioni applicate al provino sono analoghe a quelle riportate in *Figura 4.2*.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Al7075-T6, una lega di alluminio e zinco utilizzata prevalentemente nel settore aeronautico. Le proprietà meccaniche e a fatica di tale lega, ottenute da prove sperimentali reperite in letteratura (Gilbert Kaufman, 2008), sono riportate in *Tabella 4.11*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 1.2.

*Tabella 4.11 Proprietà meccaniche e a fatica della lega Al7075-T6.*

$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$L$ [mm]	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	$m$ [-]	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	$m^*$ [-]	$N_0$ [cicli]
72.00	0.30	503.00	0.028	173.73	-0.115	85.00	-0.115	$1(10)^7$

Vengono considerate tre serie di prove sperimentali, in cui è stata analizzata dagli Autori l'influenza del rapporto  $Q_a/P$ , della tensione ciclica  $\sigma_B(t)$  e della riduzione di  $P$  e  $Q$ , sulla vita a fatica. Tutti i test sono condotti in regime di scorrimento parziale (ossia  $Q < \mu P$ ). In *Tabella 4.12* vengono riportate le condizioni di carico e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura  $N_{f,exp}$ , ottenuti dagli Autori.

*Tabella 4.12 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Wittkowsky, 2000).*

No.	$R$ [mm]	$P$ [N]	$Q_a$ [N]	$\sigma_{B,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
1	25.4	20.8	15.0	83.0	449500
2	25.4	30.0	15.0	85.0	480000
3	25.4	15.6	15.0	85.0	395000
4	25.4	12.5	15.0	83.0	361000
5	25.4	20.8	15.0	83.0	449500
6	25.4	16.0	11.7	83.0	530000
7	25.4	13.9	10.0	83.0	803000

8	25.4	10.3	7.5	83.0	2940000
9	25.4	20.0	15.0	83.0	549000
10	25.4	20.0	15.0	70.0	516000

La seconda campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Navarro e collaboratori (Navarro, 2007). L'apparato di prova è analogo a quello impiegato da Wittkowsky, mostrato in *Figura 4.14*, in cui i due pads sferici sono compressi contro il provino da una forza costante  $P$ . Il carico tangenziale  $Q(t)$ , applicato al provino attraverso i pads, risulta essere in fase con la tensione ciclica  $\sigma_B(t)$ , come mostrato in *Figura 4.2*.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Al7075-T651, una lega di alluminio impiegata in applicazioni di trasporto marittimo e automobilistico. Le proprietà meccaniche e a fatica di tale lega, disponibili in letteratura (Navarro, 2008), sono riportate in *Tabella 4.13*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 1.27.

*Tabella 4.13 Proprietà meccaniche e a fatica della lega Al7075-T651.*

$E$	$\nu$	$\sigma_u$	$L$	$\sigma_{af,-1}$	$m$	$\tau_{af,-1}$	$m^*$	$N_0$
[GPa]	[-]	[MPa]	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]	[-]	[cicli]
70.00	0.33	572.00	0.013	169.00	-0.122	82.84	-0.122	1(10) <sup>7</sup>

Le prove sperimentali sono eseguite in regime di scorrimento parziale, mantenendo costante il rapporto  $Q_a/P$ , pari a 0.5. Calibrando opportunamente la rigidità delle molle, impiegate per vincolare i pads all'apparato di prova, sono considerate diverse combinazioni del carico ciclico,  $\sigma_B(t)$ , e del carico tangenziale,  $Q(t)$ , al fine di valutarne l'influenza sulla vita a fatica.

In *Tabella 4.14* vengono riportate le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di numero di cicli a rottura  $N_{f,exp}$ , ottenuti dagli Autori.

*Tabella 4.14 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Navarro,2007).*

Serie	No.	$R$	$P$	$Q_a$	$\sigma_{B,a}$	$N_{f,exp}$
		[mm]	[N]	[N]	[MPa]	[cicli]
1	1	100.0	420.0	210.0	45.0	1680000
	2	100.0	420.0	210.0	47.0	2340000
	3	100.0	420.0	210.0	50.0	850000

	4	100.0	420.0	210.0	60.0	750000
	5	100.0	420.0	210.0	68.0	590000
	6	100.0	420.0	210.0	82.0	400000
	7	100.0	420.0	210.0	95.0	270000
2	8	100.0	340.0	170.0	60.0	700000
	9	100.0	280.0	140.0	60.0	780000
	10	100.0	240.0	120.0	60.0	840000
	11	100.0	240.0	120.0	68.0	610000
	12	100.0	240.0	120.0	82.0	410000
	13	100.0	240.0	120.0	95.0	320000
	14	100.0	240.0	120.0	112.0	210000
3	15	100.0	120.0	60.0	68.0	1050000
	16	100.0	120.0	60.0	82.0	220000
	17	100.0	60.0	30.0	82.0	2950000
	18	100.0	60.0	30.0	95.0	360000
	19	100.0	60.0	30.0	112.0	330000

La terza campagna di prove sperimentali analizzata è quella condotta da Vankatesh e collaboratori (Vankatesh, 2001). L'apparato di prova è analogo a quello impiegato da Wittkowski, mostrato in *Figura 4.14*, così come le storie di carico delle sollecitazioni agenti sul provino, riportate in *Figura 4.2*.

Sia il provino che i pads sono realizzati in Ti-6Al-4V, una lega di titanio analoga al materiale analizzato da Araújo e Bellecave (Sezione 4.2.1). Conseguentemente, vengono considerate le stesse proprietà meccaniche e a fatica riportate in *Tabella 4.5*, mentre il coefficiente di attrito  $\mu$  è pari a 0.95. Come evidenziato da Kouanga (Kouanga, 2018), tale valore del coefficiente di attrito risulta essere piuttosto diverso dai valori ottenuti da Araújo e Bellecave (Sezione 4.2.1), e ciò risulta essere dovuto alla diversa geometria dei pads considerati.

Le prove sperimentali sono eseguite in regime di scorrimento parziale, e in *Tabella 4.15* vengono riportate le condizioni di carico considerate e i risultati, in termini di cicli a rottura,  $N_{f,exp}$ , ottenuti dagli Autori.

*Tabella 4.15 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Vankatesh,2001).*

Serie	No.	$R$ [mm]	$P$ [N]	$Q_a$ [N]	$\sigma_{B,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
1	1	12.7	50.0	15.0	341.0	266176
	2	12.7	50.0	14.5	300.0	474656

	3	12.7	50.0	30.0	315.0	117183
	4	12.7	50.0	30.0	250.0	278238
	5	12.7	50.0	33.0	225.0	691612
	6	12.7	50.0	23.0	300.0	307653
	7	12.7	50.0	14.5	300.0	474656
	8	12.7	40.0	16.0	300.0	401153
	9	12.7	30.0	16.0	300.0	499291
	10	12.7	22.0	15.0	300.0	284670
	11	12.7	50.0	37.5	300.0	182617
	12	12.7	50.0	21.0	300.0	317073
	13	12.7	50.0	20.0	300.0	260894
	14	12.7	50.0	20.5	300.0	240501
	15	12.7	50.0	15.5	300.0	375782
	16	12.7	50.0	26.0	300.0	271576
	17	12.7	50.0	14.0	300.0	936000
2	18	25.4	50.0	15.0	341.0	192000
	19	25.4	50.0	15.0	325.0	872863
	20	25.4	50.0	30.0	375.0	85957
	21	25.4	50.0	30.0	320.0	212491
	22	25.4	50.0	30.0	265.0	245637
	23	25.4	50.0	30.0	260.0	253700
	24	25.4	50.0	20.5	300.0	244054

I risultati delle prove sperimentali presentati in questa Sezione vengono, nel seguito, impiegati per la validazione degli approcci non-locali presentati alla Sezione 4.2.2.

#### **4.3.2 Applicazione del criterio di Carpinteri et al. combinato con approcci non-locali: contatto sferico**

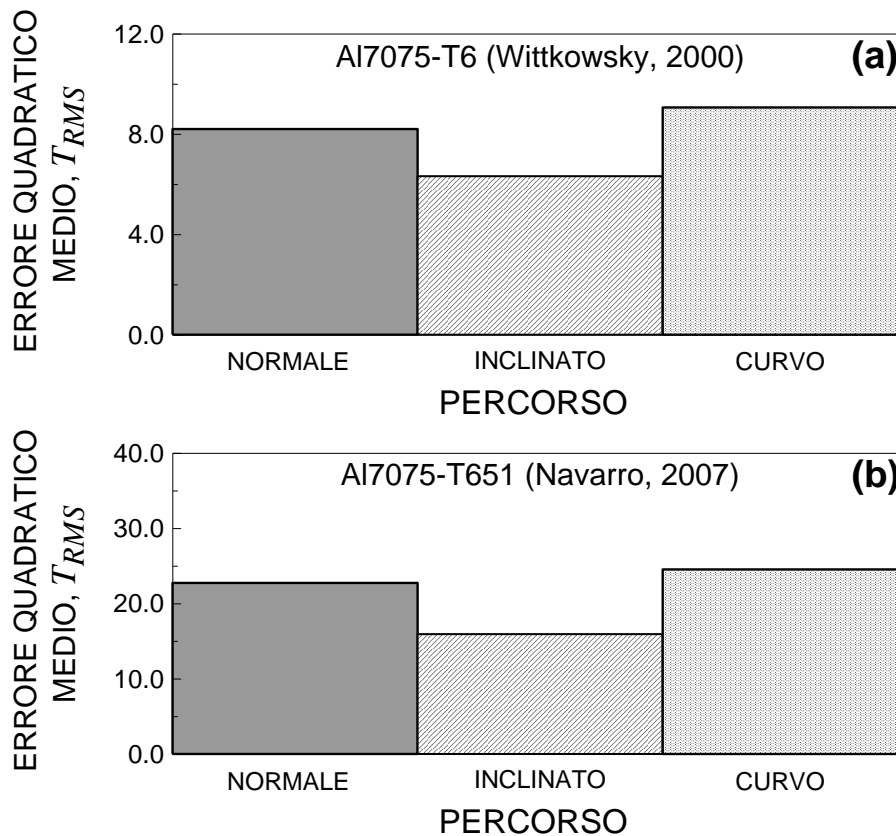
Analogamente a quanto presentato nella Sezione 4.2.2 per il contatto tra corpi cilindrici, il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri e collaboratori viene nel seguito applicato congiuntamente ad approcci non-locali, per la valutazione della vita a fatica in presenza di contatto tra corpi sferici. In particolare i dati di input del criterio, ossia le componenti del tensore degli sforzi, vengono determinate impiegando le formulazioni per contatto sferico riportate alla Sezione 2.4.2.

Vengono considerati i quattro approcci non-locali precedentemente proposti, ossia:

- (i) approccio non-locale 1: distanza critica costante;
- (ii) approccio non-locale 2: nuova formulazione della distanza critica funzione del gradiente tensionale;
- (iii) approccio non-locale 3: nuova formulazione del *Line Method*;
- (iv) approccio non-locale 4: nuova formulazione dell'*Area Method*.

#### 4.3.2.1 Approccio non-locale 1

In *Figura 4.15* viene riportato il valore dell'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , calcolato in accordo con l'*Eq.(4.2)* per i tre percorsi considerati, per ciascuna campagna di prove sperimentali presentata alla Sezione 4.3.1.



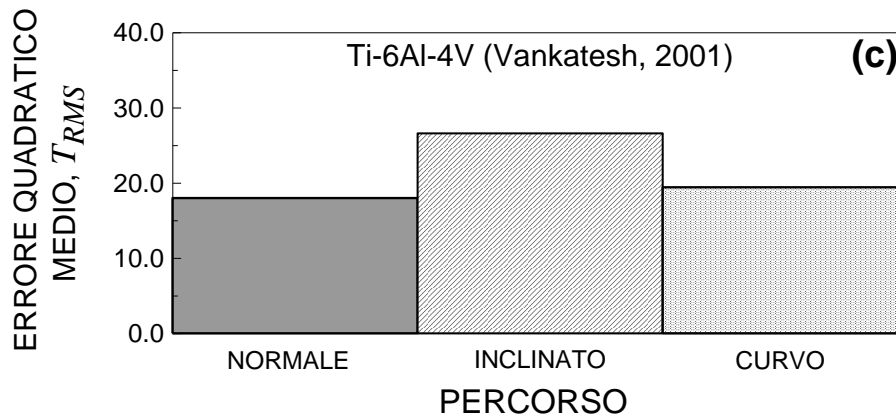


Figura 4.15 Approccio non-locale 1: errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , al variare del percorso considerato per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

Analogamente a quanto osservato per il contatto tra corpi cilindrici, anche nel contatto tra corpi sferici emerge come l'accordo tra i risultati determinati sperimentalmente e analiticamente non sia soddisfacente, indipendentemente dalla prova sperimentale analizzata e dal percorso considerato.

#### 4.3.2.2 Approccio non-locale 2

Attraverso la procedura di minimizzazione dell'errore quadratico medio, descritta alla Sezione 4.2.2.2, è possibile ottenere, per ognuno dei provini testati, il valore della distanza critica ottimale  $d_{c,opt}$ .

In Figura 4.16 tale distanza viene riportata in funzione dell'Indice di Fretting  $FI$ , determinato in accordo con l'Eq.(4.4), per ciascuna campagna di prove sperimentali riportata alla Sezione 4.3.1.

Differentemente da quanto osservabile per il contatto tra corpi cilindrici (Figura 4.6), nel caso di contatto tra corpi sferici l'andamento di  $d_{c,opt}$  in funzione di  $FI$  non appare più essere lineare, per nessuno dei materiali considerati.

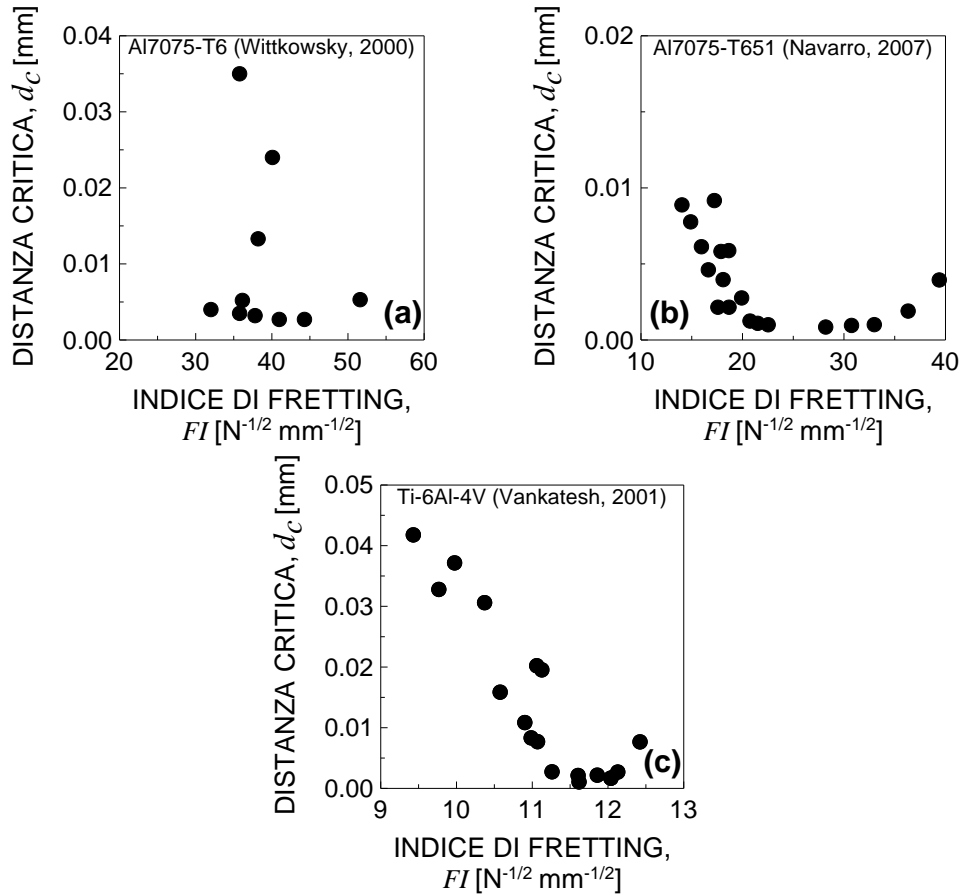


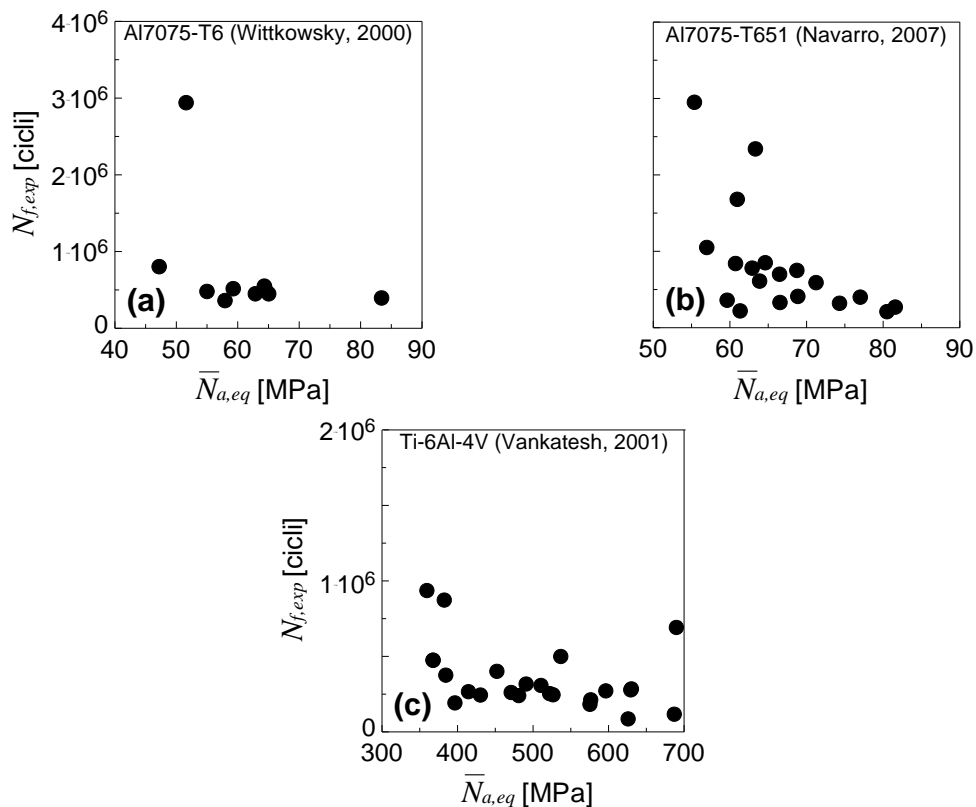
Figura 4.16 Approccio non-locale 2: andamento della distanza critica ottimale,  $d_{c,opt}$ , in funzione dell'Indice di Fretting,  $FI$ , per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

Conseguentemente, l'impiego dell'Eq.(4.5) comporterebbe la definizione di una distanza critica,  $d_c$ , tale per cui la stima della vita a fatica, attraverso l'applicazione del criterio di Carpinteri et al., risulterebbe essere poco attendibile. Per tale motivo il presente approccio non-locale, sufficientemente accurato per contatti tra corpi cilindrici, non risulta essere applicabile per contatti tra corpi sferici.



### 4.3.2.3 Approccio non-locale 3

Il numero di cicli a fatica,  $N_{f,exp}$ , ottenuto sperimentalmente, viene riportato in *Figura 4.17* in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , determinato impiegando l'Eq.(4.6), per ciascuna campagna sperimentale descritta alla Sezione 4.3.1.



*Figura 4.17* Approccio non-locale 3: andamento del numero di cicli determinato sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

Analogamente a quanto osservato per il contatto tra corpi cilindrici, anche per il contatto tra corpi sferici è possibile notare come, indipendentemente dai carichi

applicati e dal raggio dei pads considerato, vi sia un andamento pressoché lineare tra  $N_{f,exp}$  e  $\bar{N}_{a,eq}$ , per ognuno dei materiali considerati.

Risulta, quindi, possibile applicare la relazione lineare di *Eq.(4.7)*, in cui i parametri  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$  vengono determinati, attraverso l'impiego della procedura di regressione lineare, descritta alla Sezione 4.2.2.2, per ognuno dei materiali considerati. I valori di tali parametri vengono riportati in *Tabella 4.16*.

*Tabella 4.16* Valori dei parametri  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$ .

Materiale	$\alpha_{LM}$ [cicli/MPa]	$\beta_{LM}$ [cicli]
Al7075-T6	-7885.65	993788
Al7075-T651	-13870.62	1341441
Ti-6Al-4V	-2049.77	1556696

Essendo la lega di titanio analizzata da Vankatesh e collaboratori analoga a quella testata da Araújo (Araújo, 2004) e Bellecave (Bellecave, 2015) nel contatto tra corpi cilindrici, vengono considerati per i provini realizzati in Ti-6Al-4V i medesimi valori di  $\alpha_{LM}$  e  $\beta_{LM}$  riportati in *Tabella 4.9*.

I valori di tali parametri, sostituiti all'interno dell'*Eq.(4.7)*, permettono quindi di stimare direttamente il numero di cicli a rottura per ogni prova sperimentale considerata.

In *Figura 4.18* viene riportato, per ognuno dei materiali costituenti i provini analizzati, il confronto tra vita a fatica determinata sperimentalmente  $N_{f,exp}$ , e analiticamente,  $N_{f,cal}$ .

Appare evidente come tali confronti siano abbastanza soddisfacenti, analogamente al contatto tra corpi cilindrici, per ognuno dei materiali considerati. In particolare, per i provini realizzati in Al7075-T6 (*Figura 4.18(a)*) il 90% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, così come nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Al7075-T651 (*Figura 4.18(b)*) il 74% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 90% nella banda di dispersione 3. Infine, per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Vankatesh

(Figura 4.18(c)), il 71% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre l'88% nella banda di dispersione 3.

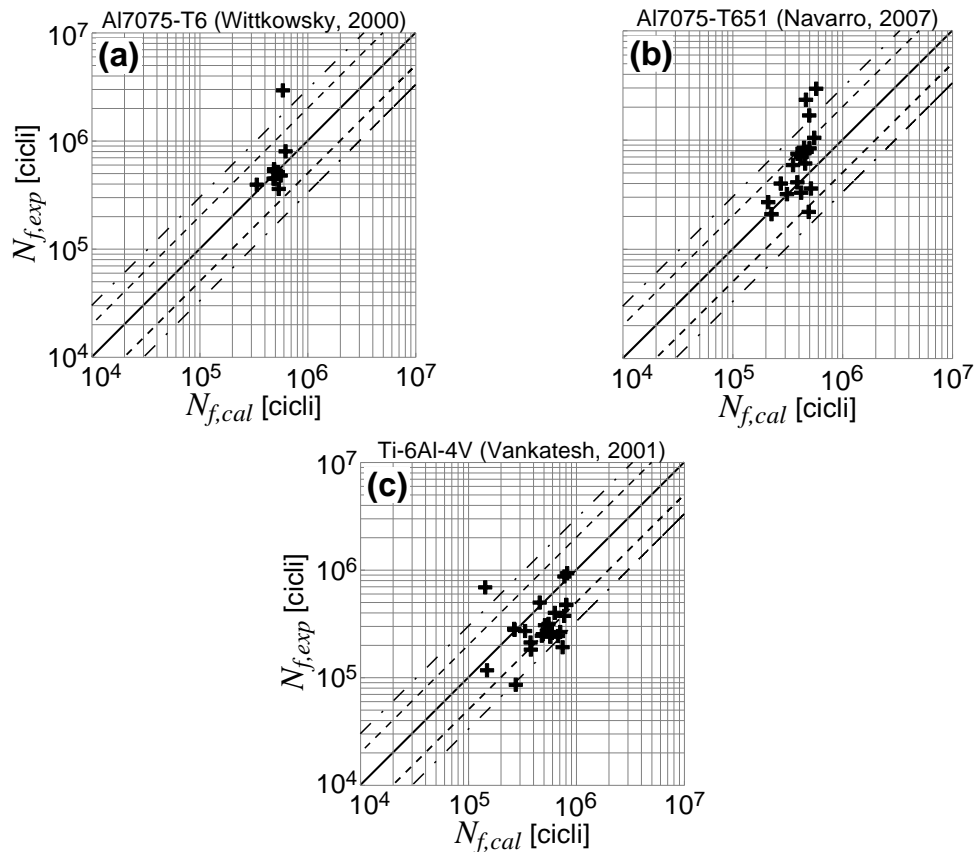


Figura 4.18 Approccio non-locale 3: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici,  $N_{f,cal}$ , e i dati sperimentali,  $N_{f,exp}$ , per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

#### 4.3.2.4 Approccio non-locale 4

Il numero di cicli a fatica,  $N_{f,exp}$ , ottenuto sperimentalmente, viene riportato in Figura 4.19 in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , determinato impiegando l'Eq.(4.8), per ciascuna campagna sperimentale descritta alla Sezione 4.3.1.

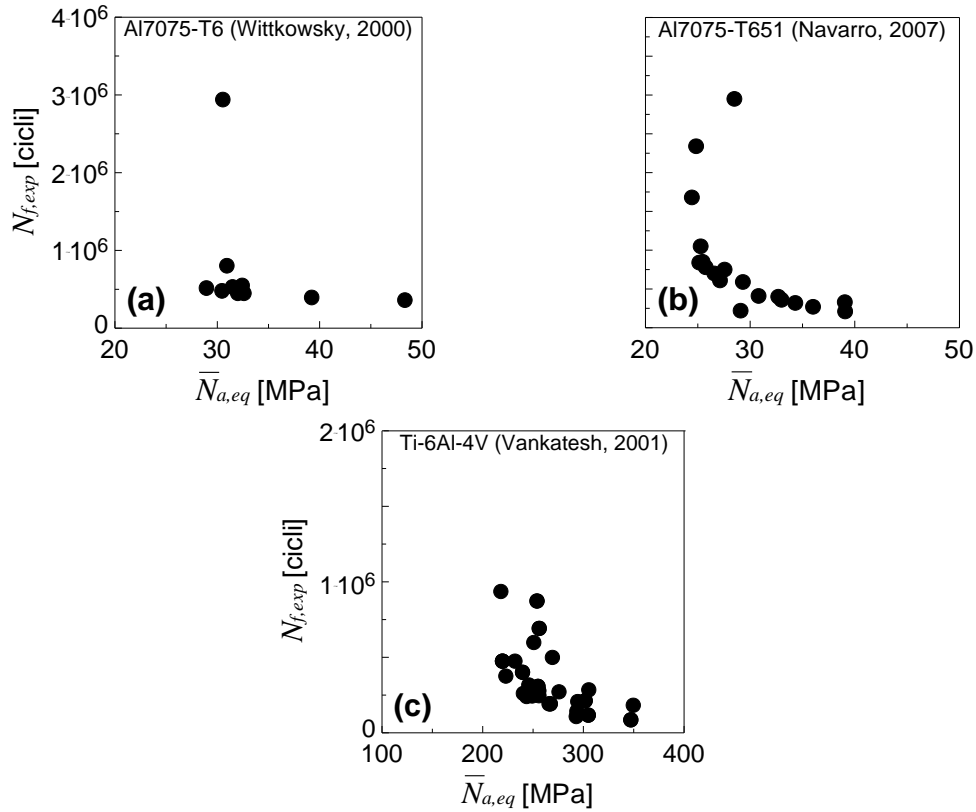


Figura 4.19 Approccio non-locale 4: andamento del numero di cicli determinato sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , in funzione del valore mediato dell'ampiezza della tensione normale equivalente,  $\bar{N}_{a,eq}$ , per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

Analogamente all'approccio non-locale 3, è possibile notare l'andamento pressoché lineare tra  $\bar{N}_{a,eq}$  e  $N_{f,exp}$ , indipendentemente dalle condizioni al contorno della prova, per ognuno dei materiali considerati.

Risulta quindi possibile applicare la relazione lineare di Eq.(4.9), in cui i parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$  vengono determinati attraverso l'impiego della procedura di regressione lineare presentata alla Sezione 4.2.2.2. I valori di tali parametri vengono riportati in Tabella 4.17, per ognuno dei materiali considerati.

Tabella 4.17 Valori dei parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$ .

Materiale	$\alpha_{AM}$ [cicli/MPa]	$\beta_{AM}$ [cicli]
Al7075-T6	-11737.98	903269
Al7075-T651	-37409.64	1591837
Ti-6Al-4V	-3153.15	1168244

Differentemente dall'approccio non-locale 3, per i parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$  riferiti alla lega di titanio Ti-6Al-4V è stata necessaria una nuova procedura di calibrazione rispetto ai relativi valori ottenuti per contatto tra corpi cilindrici.

I valori dei parametri  $\alpha_{AM}$  e  $\beta_{AM}$  così ottenuti, sostituiti all'interno dell'*Eq.(4.9)*, permettono quindi di stimare il valore del numero di cicli a rottura per ogni prova sperimentale considerata. In *Figura 4.20* viene riportato, per ognuno dei materiali considerati, il confronto tra la vita a fatica determinata sperimentalmente,  $N_{f,exp}$ , e analiticamente,  $N_{f,cal}$ .

Appare evidente come, anche per il presente approccio non-locale, tali confronti siano abbastanza soddisfacenti, per ognuno dei materiali considerati. In particolare, per i provini realizzati in Al7075-T6 (*Figura 4.20(a)*) il 90% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, così come nella banda di dispersione 3. Per i provini realizzati in Al7075-T651 (*Figura 4.20(b)*) il 74% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 90% nella banda di dispersione 3. Infine, per i provini realizzati in Ti-6Al-4V, testati da Vankatesh (*Figura 4.20(c)*), il 92% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2, mentre il 100% nella banda di dispersione 3.

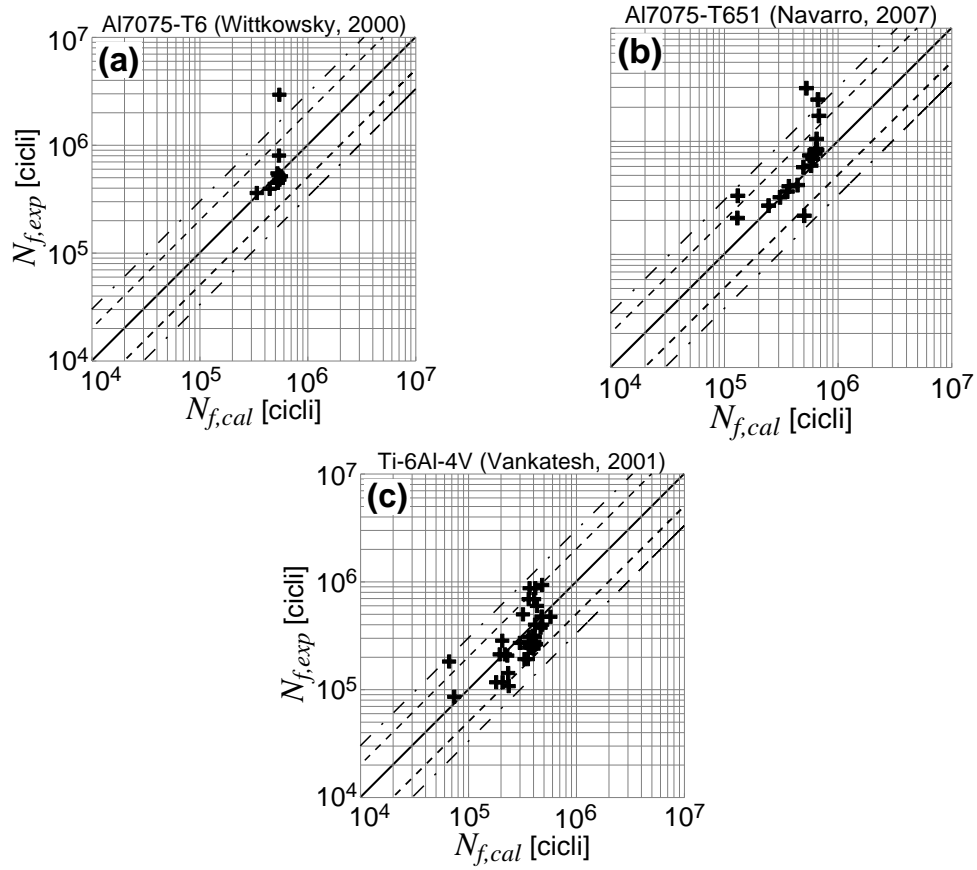


Figura 4.20 Approccio non-locale 4: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici,  $N_{f,cal}$ , e i dati sperimentali,  $N_{f,exp}$ , per: (a) Al7075-T6 (Wittkowsky, 2000); (b) Al7075-T651 (Navarro, 2007); (c) Ti-6Al-4V (Vankatesh, 2001).

## **4.4 Conclusioni**

Nel presente Capitolo è stata analizzata la determinazione della vita a fatica in presenza di contatto, con particolare riferimento a contatti tra corpi cilindrici e contatti tra corpi sferici. Tale determinazione è stata condotta estendendo il criterio di fatica multiassiale, proposto da Carpinteri et al., attraverso l'applicazione congiunta con approcci non-locali. L'estensione si rende necessaria al fine di tenere in considerazione le elevate concentrazioni tensionali presenti in prossimità della superficie di contatto, che porterebbero a sottostimare eccessivamente la vita a fatica.

In particolare, vengono presentate quattro diverse tipologie di approccio non-locale:

- (i) approccio non-locale 1: la valutazione della vita a fatica viene condotta ad una certa distanza dal punto più sollecitato, funzione delle sole proprietà a fatica del materiale;
- (ii) approccio non-locale 2: la valutazione della vita a fatica viene condotta ad una certa distanza, funzione delle proprietà a fatica del materiale e del gradiente tensionale in prossimità della superficie di contatto (nuova formulazione);
- (iii) approccio non-locale 3: la valutazione della vita a fatica viene condotta mediando una componente tensionale lungo una linea (nuova formulazione);
- (iv) approccio non-locale 4: la valutazione della vita a fatica viene condotta mediando una componente tensionale su un'area semi-circolare (nuova formulazione).

L'accuratezza degli approcci non-locali di cui sopra, applicati congiuntamente al criterio di Carpinteri et al., viene valutata impiegando dati sperimentali reperiti in letteratura. Tali dati, espressi in termini di numero di cicli a rottura, sono relativi a prove di fatica eseguite su provini realizzati con diversi materiali, in presenza di contatti cilindrici e contatti sferici.

L'approccio non-locale 1 risulta non essere adeguato nella stima della vita a fatica, fornendo risultati piuttosto dispersi e troppo conservativi rispetto ai valori di vita a fatica ottenuti sperimentalmente.

L'approccio non-locale 2 fornisce risultati piuttosto soddisfacenti per contatti tra corpi cilindrici, con una media del 92% di risultati all'interno della banda di dispersione 3. Tuttavia, tale approccio non risulta essere applicabile nei contatti tra

corpi sferici, fornendo risultati non sufficientemente in accordo con quelli sperimentali.

L'approccio non-locale 3 risulta essere sufficientemente accurato nella stima della vita a fatica, sia in presenza di contatti cilindrici che in presenza di contatti sferici, con una media del 96% e del 89% dei risultati all'interno della banda di dispersione 3, rispettivamente.

L'approccio non-locale 4 risulta essere piuttosto accurato nella stima della vita a fatica, sia in presenza di contatti cilindrici che in presenza di contatti sferici, con una media del 96% e del 93% dei risultati all'interno della banda di dispersione 3, rispettivamente.

In particolare, l'approccio non-locale 3 e l'approccio non-locale 4 vengono proposti con l'obiettivo di fornire una formulazione semplice e di rapida applicazione, per una stima diretta della vita a fatica da contatto in generiche applicazioni industriali.

L'applicazione congiunta degli approcci non-locali presentati al criterio di Carpinteri e collaboratori rappresenta un metodo promettente nella stima della vita a fatica da contatto. Tuttavia, i futuri sviluppi prevedono l'esecuzione di ulteriori analisi considerando nuovi dati sperimentali, al fine di testare l'accuratezza sistematica del metodo proposto e lo sviluppo di una procedura affidabile e robusta.



## 4.5 Bibliografia

- Araújo J.A., Nowell D. (2002) The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue. *International Journal of Fatigue* 24, 763-775.
- Araújo J.A., Nowell D., Vivacqua R.C. (2004) The use of multiaxial fatigue models to predict fretting fatigue life of components subjected to different contact stress fields. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 27, 967-978.
- Araújo J., Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) An alternative definition of the shear stress amplitude based on the maximum rectangular hull method and application to the C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 764-771.
- Araújo J.A., Bellecave J., Castro F.C., Mériaux J., Pommier S. (2015) Equivalent configurations for notch and fretting fatigue. *Frattura ed Integrità Strutturale* 33, 427-433.
- Bellecave J. (2015) *Stress gradients in fretting fatigue*. Ph.D. Thesis, École normale supérieure de Cachan, Cachan.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Multiaxial fatigue life estimation in welded joints using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 31, 188-196.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. (2013) Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 870-883.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.
- DuQuesnay D.L., Topper T.H., Yu M.T. (1986) The effect of notch radius on the fatigue notch factor and the propagation of short cracks. In: Miller K.J., de los

- Rios E.R., editors. *The behaviour of short fatigue cracks*. Mechanical Engineering Publications, London, 323-335.
- ElHaddad M.H., Dowling N.F., Topper T.H., Smith K.N. (1980) J Integral applications for short fatigue cracks at notches. *International Journal of Fracture* 16, 15-24.
- Faanes S., Fernando U.S. (1994) Influence of contact loading on fretting fatigue behaviour. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 17, 939-947.
- Fouvry S., Elleuch K., Simeon G. (2002) Prediction of crack nucleation under partial slip fretting conditions. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 37, 549-564.
- Fouvry S., Gallien H., Berthel B. (2014) From uni- to multi-axial fretting-fatigue crack nucleation: Development of a stress-gradient-dependent critical distance approach. *International Journal of Fatigue* 62, 194-209.
- Giannakopoulos A.E., Lindley T.C., Suresh S. (1998) Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics: theoretical connections and a life prediction methodology for fretting-fatigue. *Acta Materialia* 46, 2955-2968.
- Giannakopoulos A.E., Lindley T.C., Suresh S. (2000) Applications of fracture mechanics in fretting fatigue life assessment. In: *Hoepfner D.W., Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. Fretting fatigue: current technology and practices*. ASTM STP 1367, Philadelphia, 80-99.
- Gilbert Kaufman J. (2008) *Properties of aluminium alloys*. ASM International, Novelty.
- Giner E., Navarro C., Sabsabi M., Tur M., Domnguez J., Fuenmayor F.J. (2011) Fretting fatigue life prediction using the extended finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences* 53, 217-225.
- Hattori T., Nakamura M., Watanabe T. (2000) A new approach to the prediction of the fretting fatigue life that considers the shifting of the contact edge by wear. In: *Hoepfner D.W., Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. Fretting fatigue: current technology and practices*. ASTM STP 1367, Philadelphia, 19-30.
- Kouanga C.T., Jones J.D., Revill I., Wormald A., Nowell D. Dwyer-Joyce R.S., Araújo J.A., Susmel L. (2018) On the estimation of finite lifetime under fretting fatigue loading. *International Journal of Fatigue* 112, 138-152.

- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lykins C.D., Mall S., Jain V.K. (2001) Combined experimental-numerical investigation of fretting fatigue crack initiation. *International Journal of Fatigue* 23, 703-711.
- Madge J.J., Leen S.B., Shipway P.H. (2007) The critical role of fretting wear in the analysis of fretting fatigue. *Wear* 263, 542-551.
- Mutoh Y., Xu J.Q., Kondoh K. (2003) Observations and analysis of fretting fatigue crack initiation and propagation. In: Mutoh Y., Kinyon S.E., Hoepfner D.W., editors. *Fretting fatigue: advances in basic understanding and applications*. ASTM STP 1425, West Conshohocken, 61-75.
- Navarro C., Garcia M., Domínguez J. (2003) A procedure for estimating the total life in fretting fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 459-468.
- Navarro C., Domínguez J. (2004) Initiation criteria in fretting fatigue with spherical contact. *International Journal of Fatigue* 26, 1253-1262.
- Navarro C., Muñoz S., Domínguez J. (2007) Application of fracture mechanics to estimate fretting fatigue endurance curves. *Engineering Fracture Mechanics* 74, 2168-2186.
- Navarro C., Muñoz S., Domínguez J. (2008) On the use of multiaxial fatigue criteria for fretting fatigue life assessment. *International Journal of Fatigue* 30, 32-44.
- Navarro C., Vázquez J., Domínguez J. (2011) A general model to estimate life in notches and fretting fatigue. *Engineering Fracture Mechanics* 78, 1590-1601.
- Nowell D. (1988) *An analysis of fretting fatigue*. Ph.D. Thesis, University of Oxford, Oxford.
- Ruiz C., Boddington P.H.B., Chen K.C. (1984) An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint. *Experimental Mechanics* 24, 208-217.
- Sum W.S., Williams E.J., Leen S.B. (2005) Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations. *International Journal of Fatigue* 27, 403-416.
- Szolwinski M.P., Farris T.N. (1998) Observation, analysis and prediction of fretting fatigue in 2024-T351 aluminum alloy. *Wear* 221, 24-36.

- Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.
- Taylor D. (2007) *The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics*. Elsevier, Oxford.
- Vázquez J., Navarro C., Domínguez J. (2014) A model to predict fretting fatigue life including residual stresses. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73, 144-151.
- Vankatesh T., Conner B., Giannakopoulos A., Lee C., Lindley T., Suresh S. (2001) An experimental investigation of fretting fatigue in Ti-6Al-4V: the role of contact conditions and microstructure. *Metallurgical and Materials Transactions A* 32, 1131-1146.
- Vantadori S., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2017) A stress gradient approach for fretting fatigue assessment of metallic structural components. *International Journal of Fatigue* 101, 1-8.
- Wittkowsky B.U., Birch P.R., Domínguez J., Suresh S. (2000) An experimental investigation of fretting fatigue with spherical contact in 7075-T6 aluminum alloy. In: Hoepfner D.W. Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. *Fretting fatigue: current technology and practices*. ASTM STP 1367, Philadelphia, 213-227.

**DETERMINAZIONE DEL PIANO DI NUCLEAZIONE  
DELLA FESSURA PER COMPONENTI METALLICI IN  
PRESENZA DI CONTATTO**

---

**CRACK INITIATION PLANE DETERMINATION  
FOR METALLIC COMPONENTS  
UNDER CONTACT FATIGUE**

*The present Chapter deals with the determination of the crack initiation plane for metallic structural components subjected to fretting fatigue.*

*The analysis of the state-of-the-art shows that different studies have been conducted in order to estimate the crack initiation plane under fretting fatigue, especially in industrial field.*

*Cheng and co-workers (Cheng, 1994), proposed to consider the micro-mechanical dislocations of material grains to model the crack initiation mechanism. Nevertheless, the definition of the mechanical properties at the microscopic scale results to be particularly complicated and therefore difficult to be applied. Szolwinski and Farris (Szolwinski, 1996) proposed the use of the multiaxial fatigue parameter by Smith, Watson and Topper (SWT) (Smith, 1970) in order to estimate the fatigue life as well as the crack site location and the orientation of the nucleation plane. In particular, as was shown by Neu et al. (Neu, 1999), the SWT parameter, similar to what occurs for other fatigue parameters as well as the one proposed by Ruiz and Chen (Ruiz, 1986), is able to correctly estimate the crack initiation site, but not the crack nucleation plane. Araújo and Mamiya (Araújo, 2003) used the fatigue criterion of Dang Van to analyse the crack initiation process in specimens of aluminium alloy. Fouvry and co-workers (Fouvry, 2004), instead, used the Crossland criterion to evaluate the crack nucleation risk in specimens of titanium alloy.*

Nevertheless, the critical plane-based criteria are recognised as the most appropriate ones to estimate the crack nucleation plane (Araújo, 2017), since the critical plane definition itself reflects the nature of the phenomenon being examined. Araújo and Nowell (Araújo, 2002) performed contact fatigue tests on specimens made of different metallic alloys, and analysed the crack initiation process employing criteria based on the critical plane concept. Analogously, Namjoshi and co-workers (Namjoshi, 2002) performed experimental and theoretical analyses on specimens made of titanium alloy, in order to identify the crack initiation plane by examining different contact geometries and different critical plane-based approaches. Finally, Vázquez and co-workers (Vázquez, 2017) performed tests under cylindrical contact fatigue on specimens made of aluminium alloy, and compared experimental results (in terms of crack initiation plane) with the analytical estimations determined by applying two different critical plane-based criteria.

The present Chapter aims to determine the orientation of the crack nucleation plane. More precisely, three different procedures are herein proposed on the basis of the critical distance concept and employing the critical plane-based multiaxial fatigue criterion by Carpinteri et al., outlined in Section 3.2.1.

To validate such procedures, experimental data available in literature are examined (Fouvry, 2008; Baietto, 2013; Almeida, 2017), related to tests performed under cylindrical contact fatigue.

## 5.1 Introduzione

Il presente Capitolo è dedicato alla determinazione del piano di nucleazione della fessura in componenti strutturali metallici soggetti a fatica da contatto.

L'analisi dello stato dell'arte mostra come diversi siano gli studi condotti allo scopo di stimare la giacitura del piano di nucleazione delle fessure in presenza di fatica da contatto, di utilità soprattutto nel settore industriale.

Cheng e collaboratori (Cheng, 1994), proposero di considerare le dislocazioni micro-meccaniche dei grani del materiale per modellare il meccanismo di nucleazione delle fessure. Tuttavia, la definizione delle proprietà meccaniche del materiale ad una scala microscopica è particolarmente complicata, e quindi di difficile applicazione. Szolwinski e Farris (Szolwinski, 1996) utilizzarono il

parametro di fatica multiassiale proposto da Smith, Watson e Topper (SWT) (Smith, 1970) per stimare, oltre che la vita a fatica, anche il punto di origine e la giacitura del piano di nucleazione della fessura. In particolare, come mostrato da Neu et al. (Neu, 1999), l'utilizzo del parametro SWT, analogamente ad altri parametri di fatica, tipicamente impiegati, come quello di Ruiz e Chen (Ruiz, 1986), riescono a stimare correttamente il punto di origine della fessura, ma non la giacitura del piano di nucleazione. Araújo e Mamiya (Araújo, 2003) impiegarono il criterio di fatica di Dang Van per analizzare la fase di nucleazione delle fessure in provini realizzati in lega di alluminio. Fouvry e collaboratori (Fouvry, 2004), invece, utilizzarono il criterio di Crossland per valutare il rischio di nucleazione delle fessure in provini realizzati in lega di titanio.

Tuttavia, i criteri basati sul piano critico sono riconosciuti come i più appropriati nella stima della giacitura del piano di nucleazione delle fessure (Araújo, 2017), in quanto la definizione stessa del piano critico riflette la natura del fenomeno. Araújo e Nowell (Araújo, 2002) condussero prove di fatica in presenza di contatto su provini realizzati con diverse leghe metalliche, e analizzarono la fase di nucleazione impiegando criteri basati sul concetto di piano critico. Namjoshi e collaboratori (Namjoshi, 2002), analogamente, eseguirono analisi sperimentali e teoriche su provini realizzati in lega di titanio, per l'individuazione della giacitura dei piani di nucleazione delle fessure, considerando diverse geometrie di contatto e differenti criteri del piano critico. Infine, Vázquez e collaboratori (Vázquez, 2017) eseguirono prove di fatica in presenza di contatto cilindrico su provini realizzati in lega di alluminio, e compararono i risultati sperimentali in termini di piano di nucleazione della fessura con le giaciture stimate applicando due differenti criteri basati sul piano critico.

Il presente Capitolo è dedicato alla stima della giacitura del piano di nucleazione della fessura. Più precisamente, vengono proposte tre differenti procedure, basate sul concetto di distanza critica e impiegando il criterio di fatica multiassiale proposto da Carpinteri et al., illustrato nella Sezione 3.2.1.

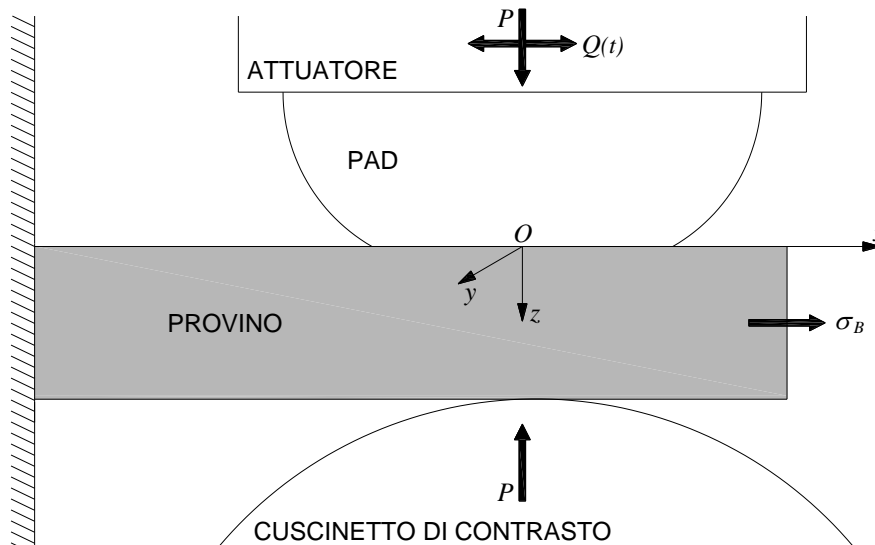
Al fine di verificare la validità delle procedure proposte, vengono esaminati dati sperimentali disponibili in letteratura (Fouvry, 2008; Baietto, 2013; Almeida, 2017), relativi a prove di fatica condotte in presenza di contatto cilindrico.

## 5.2 Determinazione del piano di nucleazione della fessura

La valutazione del piano di nucleazione della fessura in presenza di fatica da contatto viene, nella presente Sezione, condotta sfruttando il concetto della distanza critica e impiegando il criterio di Carpinteri e collaboratori presentato nel Capitolo 3. Più precisamente, vengono proposte tre differenti procedure, ciascuna delle quali viene validata impiegando dati sperimentali disponibili in letteratura, e relative a contatti cilindrici.

### 5.2.1 Risultati sperimentali analizzati

La prima campagna di prove sperimentali analizzata è stata condotta da Araújo e collaboratori (Almeida, 2017) presso l'Università di Brasilia. L'apparato di prova, mostrato schematicamente in *Figura 5.1*, è composto di un pad cilindrico compresso contro un provino da una forza normale,  $P$ .



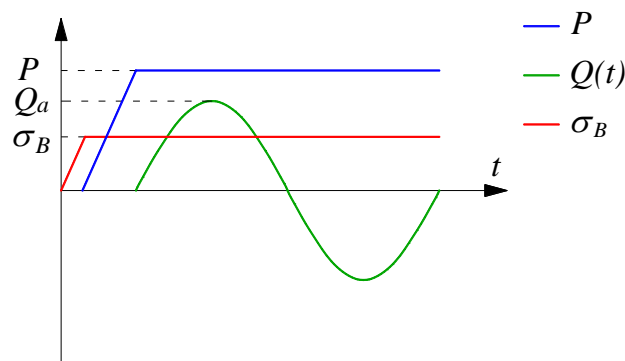
*Figura 5.1 Rappresentazione schematica dell'apparato di prova.*

Il provino viene fissato all'apparato di prova ad un estremo, e vincolato all'estremo opposto attraverso un attuatore idraulico, il quale permette l'applicazione di una tensione statica,  $\sigma_B$ . Un secondo attuatore, indipendente dal



primo, permette l'applicazione di un carico tangenziale ciclico,  $Q(t)$ , di ampiezza pari a  $Q_a$ , e valore medio nullo.

Le storie di carico delle sollecitazioni applicate al provino vengono riportate in *Figura 5.2*.



*Figura 5.2* Storie di carico delle sollecitazioni applicate al provino.

L'applicazione della tensione statica,  $\sigma_B$ , prima della forza normale,  $P$ , si rende necessaria per analizzare l'effetto della tensione media senza influenzare la distribuzione dei carichi in corrispondenza della superficie di contatto: restano, quindi, valide le espressioni riportate nella Sezione 2.4.

Sia il provino che il pad sono realizzati in Al7050-T7451, una lega di alluminio utilizzata nell'industria aerospaziale, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (Vantadori, 2018) e vengono riportate in *Tabella 5.1*, mentre il coefficiente di attrito,  $\mu$ , è pari a 0.54.

*Tabella 5.1* Proprietà meccaniche e a fatica della lega Al7050-T7451.

$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$L$ [mm]	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	$N_0$ [cicli]
71.7	0.33	524.0	0.047	82.5	71.4	$5(10)^6$

Sono state considerate sei diverse configurazioni geometriche e di carico, in regime di scorrimento parziale (ossia  $Q_a < \mu P$ ), facendo variare il rapporto tra

l'ampiezza del carico tangenziale e il carico normale ( $Q_a/P$ ), il valore della tensione statica,  $\sigma_B$ , e il raggio del pad,  $R$ .

I test sperimentali sono stati interrotti in corrispondenza di  $10^6$  cicli: il provino è stato poi sezionato longitudinalmente, misurando l'angolo,  $\theta_{exp}$ , formato dal piano di nucleazione della fessura con l'asse verticale. In *Tabella 5.2* vengono riportate le configurazioni geometriche e le condizioni di carico considerate, e i risultati, in termini di  $\theta_{exp}$  e dello scarto quadratico medio  $sqm$ , per ogni configurazione analizzata.

*Tabella 5.2 Configurazioni geometriche e condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Almeida, 2017).*

Configurazione No.	Test No.	$R$ [mm]	$P$ [N/mm]	$Q_a$ [N/mm]	$\sigma_B$ [MPa]	$\theta_{exp}$ [°]	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]
1	1	70	800	240	0	12.8	21.4±12.2
	2	70	800	240	0	30.0	
2	3	70	800	320	0	28.0	29.5±6.4
	4	70	800	320	0	36.6	
	5	70	800	320	0	24.0	
3	6	70	800	400	0	25.7	31.4±8.0
	7	70	800	400	0	37.0	
4	8	30	341	136	0	29.7	25.9±5.4
	9	30	341	136	0	22.0	
5	10	70	800	320	25	40.7	32.4±13.6
	11	70	800	320	25	16.7	
	12	70	800	320	25	39.7	
6	13	70	800	320	50	46.5	35.7±9.6
	14	70	800	320	50	32.8	
	15	70	800	320	50	27.9	

La seconda campagna di prove sperimentali analizzata è stata condotta da Fouvry et al. (Fouvry, 2008). L'apparato di prova è analogo a quello impiegato da Araújo (*Figura 5.1*), in cui un pad cilindrico viene compresso contro il provino da una forza normale,  $P$ . Il pad viene rigidamente fissato all'apparato di prova, mentre il provino risulta essere vincolato ad un attuatore, il quale garantisce l'applicazione di un carico tangenziale ciclico,  $Q(t)$ , di ampiezza  $Q_a$  e valore medio nullo.

Il provino è realizzato in AISI1034, una lega di alluminio prevalentemente impiegata per la realizzazione di dadi, bulloni e viti prigioniere, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (Araújo, 2017) e vengono riportate in *Tabella 5.3*.

*Tabella 5.3 Proprietà meccaniche e a fatica della lega AISI1034.*

$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$L$ [mm]	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	$N_0$ [cicli]
200	0.3	600	0.053	270	170	$1(10)^6$

Il pad, invece, è realizzato in 52100, una lega di cromo e alluminio, scelta essendo le caratteristiche meccaniche, in termini di modulo di elasticità,  $E$ , e coefficiente di Poisson,  $\nu$ , molto simili al materiale utilizzato per il provino, ma di resistenza più elevata. Tale accorgimento si rende necessario al fine di garantire che la nucleazione della fessura avvenga nel provino e non nel pad. Il coefficiente di attrito calcolato,  $\mu$ , è pari a 0.9.

È stata considerata un'unica configurazione geometrica e di carico, in regime di scorrimento parziale (ossia  $Q_a < \mu P$ ), dettagliata in *Tabella 5.4*. L'angolo  $\theta_{exp}$  è stato determinato dopo aver interrotto la prova in corrispondenza di  $10^6$  cicli.

*Tabella 5.4 Configurazioni geometriche e condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Fouvry, 2008).*

Configurazione No.	Test No.	$R$ [mm]	$P$ [N/mm]	$Q_a$ [N/mm]	$\sigma_B$ [MPa]	$\theta_{exp}$ [°]
1	1	40	227	169	0	30

L'ultima campagna di prove sperimentali analizzata è stata condotta da Baietto e collaboratori (Baietto, 2013). L'apparato di prova è analogo a quello impiegato da Araújo e Fouvry (*Figura 5.1*), dove il pad cilindrico è compresso contro il provino da una forza normale,  $P$ . Il pad è soggetto ad un carico tangenziale ciclico,  $Q(t)$ , di ampiezza pari a  $Q_a$  e con valore medio nullo, mentre il provino risulta essere soggetto ad una tensione statica,  $\sigma_B$ .

Il provino è realizzato in 35NCD16, una lega di alluminio, nickel, cromo e molibdeno utilizzata prevalentemente per la realizzazione di stampi industriali, le cui proprietà meccaniche e a fatica sono disponibili in letteratura (Baietto, 2013; Araújo, 2017) e vengono riportate in *Tabella 5.5*.

*Tabella 5.5 Proprietà meccaniche e a fatica della lega 35NCD16.*

$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_u$ [MPa]	$L$ [mm]	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	$N_0$ [cicli]
200	0.3	1270	0.039	386	357	$5(10)^6$

Il pad, invece, è realizzato in 100C6, una lega di acciaio e cromo scelta, analogamente alla campagna sperimentale presentata in precedenza, per garantire caratteristiche meccaniche simili al materiale del provino, evitando però che la fessura nuclei nel pad. Il coefficiente di attrito calcolato,  $\mu$ , è pari a 0.9.

Sono state considerate cinque diverse configurazioni di carico e un'unica configurazione geometrica, in regime di scorrimento parziale (ossia  $Q_a < \mu P$ ), in cui è stato fatto variare il valore della tensione statica,  $\sigma_B$ . In *Tabella 5.6* vengono riportate le configurazioni geometriche e le condizioni di carico considerate, e i risultati, in termini di  $\theta_{exp}$ , del valore medio,  $\theta_{exp,m}$ , e dello scarto quadratico medio  $sqm$ , dopo aver interrotto la prova in corrispondenza del numero di cicli  $N$  riportato in *Tabella 5.6*.

*Tabella 5.6 Configurazioni geometriche e condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati (Baietto, 2013).*

Configurazione No.	Test No.	$N$ [cicli]	$R$ [mm]	$P$ [N/mm]	$Q_a$ [N/mm]	$\sigma_B$ [MPa]	$\theta_{exp}$ [°]	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]
1	1	100000	80	1000	500	0	16.7	13.4±2.9
	2	250000	80	1000	500	0	12.7	
	3	500000	80	1000	500	0	11.0	
2	4	100000	80	1000	500	70	22.2	23.6±16.3
	5	250000	80	1000	500	70	1.1	
	6	500000	80	1000	500	70	36.8	
	7	750000	80	1000	500	70	34.1	
3	8	100000	80	1000	500	140	27.9	13.8±9.2
	9	250000	80	1000	500	140	3.3	

	10	350000	80	1000	500	140	15.4	
	11	425000	80	1000	500	140	8.2	
	12	500000	80	1000	500	140	13.9	
4	13	200000	80	1000	500	180	13.8	24.2±9.2
	14	300000	80	1000	500	180	31.1	
	15	400000	80	1000	500	180	27.7	
5	16	200000	80	1000	500	210	11.3	19.8±13.2
	17	400000	80	1000	500	210	34.9	
	18	500000	80	1000	500	210	13.2	

I risultati delle prove sperimentali presentate in questa sezione vengono, nel seguito, impiegati per validare le tre procedure proposte per la determinazione della giacitura del piano di nucleazione della fessura.

### **5.2.2 Descrizione delle procedure impiegate per la determinazione del piano di nucleazione della fessura**

Analogamente alla valutazione della vita a fatica presentata nel Capitolo 4, la determinazione del piano di nucleazione della fessura nella fatica da contatto viene condotta impiegando il criterio proposto da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2009; Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013; Araújo, 2014; Carpinteri, 2015).

Così come per la determinazione della vita a fatica, anche per la determinazione della giacitura del piano di nucleazione della fessura, la scelta del punto in cui analizzare lo stato tensionale può portare alla determinazione di una giacitura del piano di nucleazione della fessura che varia considerevolmente, variando la posizione del punto considerato.

Per tale ragione, la determinazione del piano di nucleazione della fessura viene condotta secondo procedure che sfruttano il concetto della distanza critica,  $L$ , che rappresenta la lunghezza intrinseca del materiale proposta da ElHaddad (ElHaddad, 1980) e calcolata impiegando l'*Eq.(3.16)*, congiuntamente al criterio di Carpinteri.

In particolare, le procedure considerate risultano:

(i) procedura 1: secondo tale procedura, il piano di nucleazione della fessura viene valutato come media della giacitura dei piani critici (valutati secondo il criterio di Carpinteri et al.), relativi a punti materiali disposti lungo un dato percorso curvo, di lunghezza pari a  $L$ ;

- (ii) procedura 2: secondo tale procedura, il piano di nucleazione della fessura viene assunto coincidente con il piano critico (valutato secondo il criterio di Carpinteri et al.) al centro di una regione di materiale, detta volume strutturale;
- (iii) procedura 3: secondo tale procedura si impiega il *Critical Direction Method*, proposto da Araújo e collaboratori (Araújo, 2017), per determinare il piano di nucleazione della fessura, massimizzando l'ampiezza della tensione equivalente, valutata applicando il criterio di Carpinteri et al.

### 5.2.2.1 Procedura 1

Si consideri un percorso curvo di lunghezza pari a  $L$ , come mostrato in Figura 5.3.

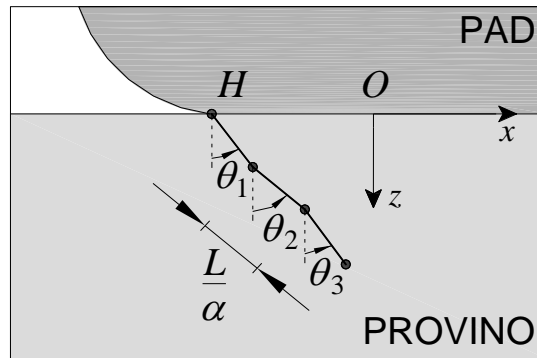


Figura 5.3 Procedura 1: rappresentazione schematica del metodo.

Più precisamente, il primo punto di tale percorso coincide con il punto più sollecitato, in termini di ampiezza di tensione equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , sulla superficie di contatto, l'*Hot-spot H*: in tale punto viene determinata la giacitura del piano critico,  $\theta_1$ , in accordo con il criterio di Carpinteri e collaboratori. Quindi, il punto successivo del percorso viene individuato (sul piano critico appena determinato) ad una distanza pari a  $L/\alpha$ , dove  $\alpha$  è una costante intera che definisce il passo di incremento. Un valore di  $\alpha$  pari a 10 è sufficiente a garantire un adeguato margine di accuratezza (Araújo, 2017).

La presente procedura viene ripetuta finché la lunghezza del percorso è pari a  $L$ . La giacitura del piano di nucleazione della fessura,  $\theta_{anal}$ , viene calcolata come il valore medio dei  $\theta_i$  angoli ottenuti.

In Figura 5.4 è riportato il piano di nucleazione della fessura determinato analiticamente (linea continua) e quello sperimentale (linea tratteggiata), relativamente alle prove condotte da Almeida e collaboratori, sui provini realizzati in Al7050-T7451.

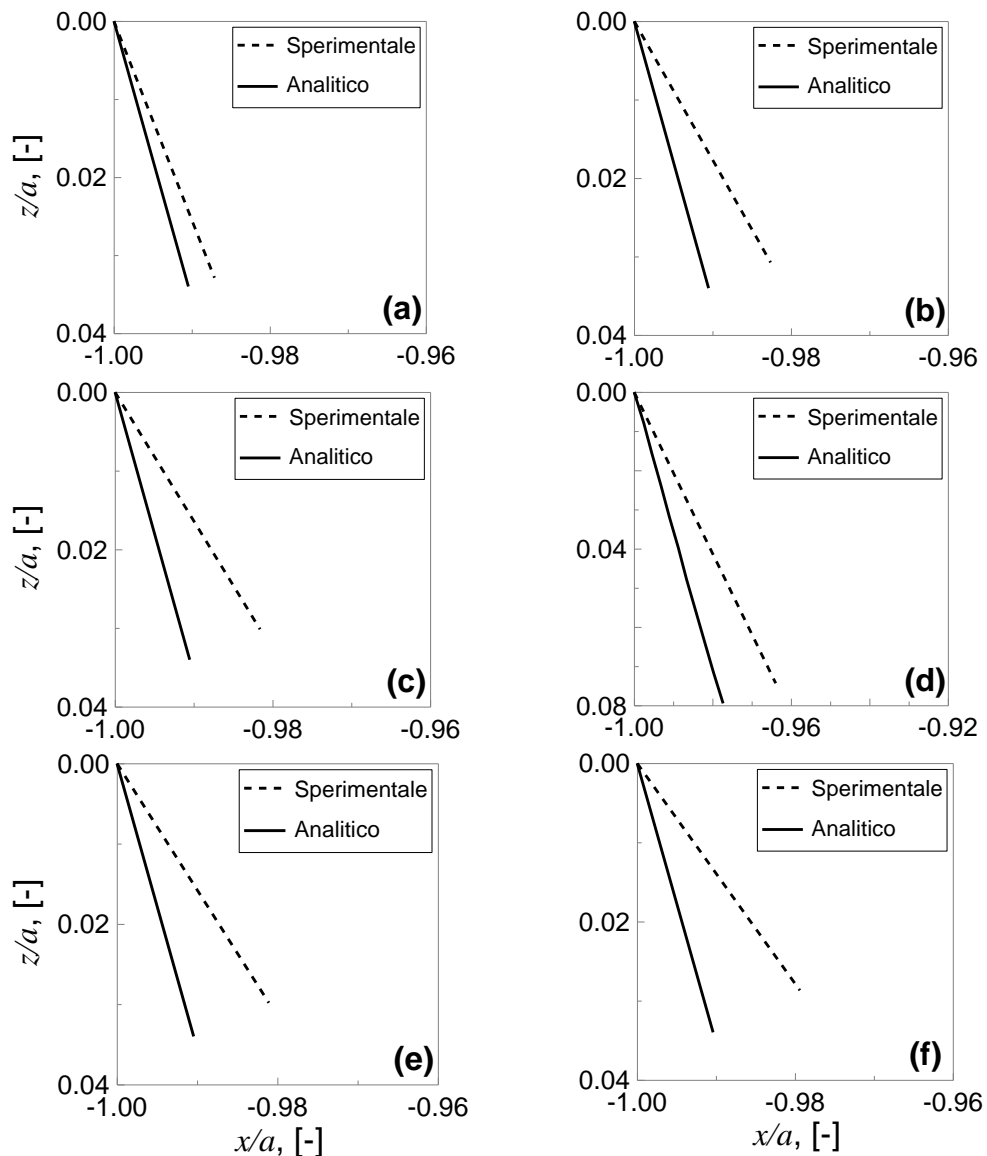


Figura 5.4 Procedura 1: confronto tra i risultati analitici,  $\theta_{anal}$ , e i dati sperimentali,  $\theta_{exp}$ , per: (a)-(f) le sei configurazioni analizzate da Almeida et al. (Almeida, 2017).

È possibile notare come, per ognuna delle prove sperimentali considerate, il piano determinato analiticamente proceda verso l'interno della superficie di contatto (ossia  $-1 \leq x/a \leq 1$ ), in accordo con le evidenze sperimentali. Tuttavia, la giacitura del piano sperimentale non risulta essere stimata con sufficiente accuratezza. In particolare, i valori di  $\theta_{anal}$  risultano essere sottostimati rispetto ai relativi valori ottenuti sperimentalmente, come riportato in *Tabella 5.7*.

*Tabella 5.7 Procedura 1: giacitura del piano di nucleazione della fessura sperimentale e analitica, per le prove analizzate da Almeida et al. (Almeida, 2017).*

Configurazione No.	Test No.	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]	$\theta_{anal}$ [°]
1	1	21.4±12.2	15.7
	2		
2	3	29.5±6.4	15.7
	4		
	5		
3	6	31.4±8.0	15.7
	7		
4	8	25.9±5.4	15.8
	9		
5	10	32.4±13.6	15.7
	11		
	12		
6	13	35.7±9.6	15.8
	14		
	15		

In *Figura 5.5* è riportato il piano di nucleazione della fessura determinato analiticamente (linea continua) e quello sperimentale (linea tratteggiata), relativamente alle prove condotte da Fouvry e collaboratori, sui provini realizzati in AISI1034.



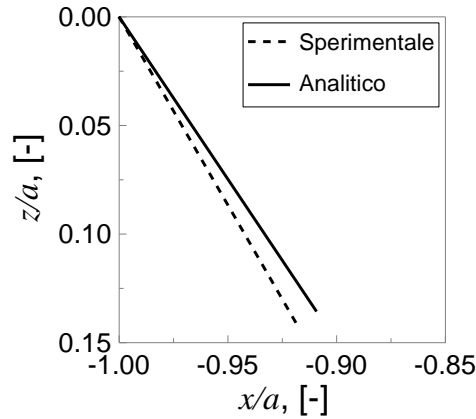


Figura 5.5 Procedura 1: confronto tra i risultati analitici,  $\theta_{anal}$ , e i dati sperimentali,  $\theta_{exp}$ , per la configurazione analizzata da Fouvry et al. (Fouvry, 2008).

Il confronto appare soddisfacente, con un valore di  $\theta_{anal}$ , pari a  $33.8^\circ$ , molto prossimo a quello sperimentale,  $\theta_{exp}$ , pari a  $30.0^\circ$ .

Infine, in Figura 5.6 è riportato il piano di nucleazione della fessura determinato analiticamente (linea continua) e quello sperimentale (linea tratteggiata), relativamente alle prove condotte da Baietto e collaboratori, sui provini realizzati in 35NCD16.

Analogamente ai risultati ottenuti per i provini realizzati in Al7050-T7451, nonostante il piano determinato analiticamente proceda verso l'interno della superficie di contatto, l'angolo che identifica la giacitura del piano risulta essere eccessivamente sottostimato rispetto al relativo valore sperimentale.

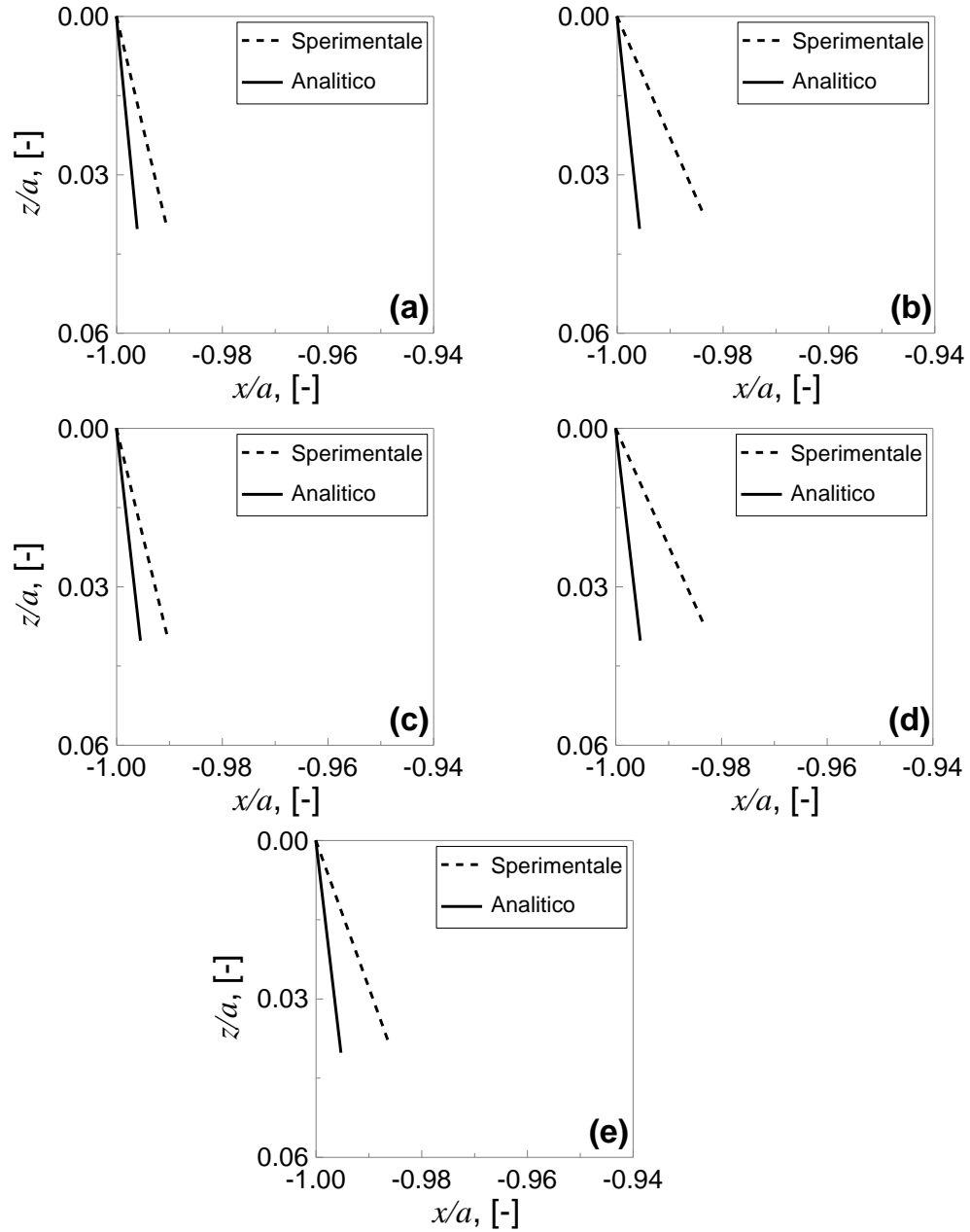


Figura 5.6 Procedura 1: confronto tra i risultati analitici,  $\theta_{anal}$ , e i dati sperimentali,  $\theta_{exp}$ , per: (a)-(e) le cinque configurazioni analizzate da Baietto et al. (Baietto, 2013).

I valori di  $\theta_{anal}$  vengono riportati nella *Tabella 5.8*, insieme ai relativi dati sperimentali, per ognuna delle configurazioni di carico analizzate.

*Tabella 5.8 Procedura 1: giacitura del piano di nucleazione della fessura sperimentale e analitica, per le prove analizzate da Baietto et al. (Baietto, 2013).*

Configurazione No.	Test No.	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]	$\theta_{anal}$ [°]
1	1	13.4±2.9	5.6
	2		
	3		
2	4	23.6±16.3	6.1
	5		
	6		
	7		
3	8	13.8±9.2	6.5
	9		
	10		
	11		
	12		
4	13	24.2±9.2	6.6
	14		
	15		
5	16	19.8±13.2	6.8
	17		
	18		

L'accuratezza della procedura 1 può essere valutata attraverso l'impiego del metodo dello scarto quadratico medio (Łagoda, 2014) presentato nella Sezione 4.2.2.1. In particolare, il valore dell'errore dello scarto quadratico medio,  $E_{RMS}$ , viene determinato come segue:

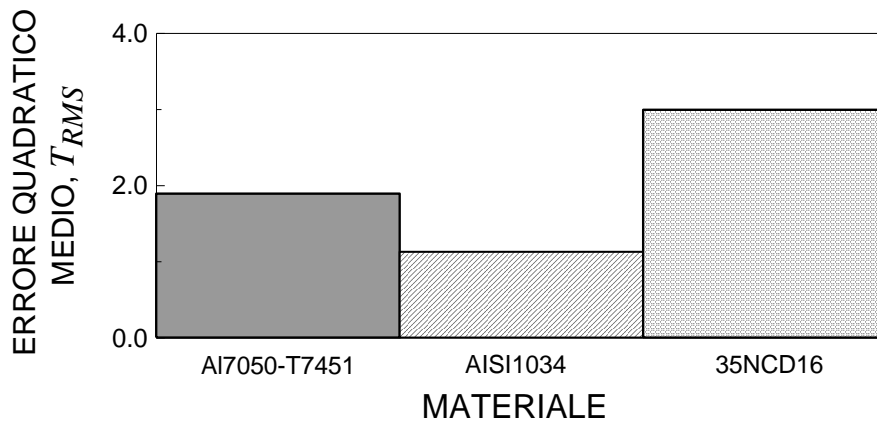
$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^j \log^2 \left( \frac{\theta_{exp,i}}{\theta_{anal,i}} \right)}{j}} \quad (5.1)$$

dove  $j$  indica il numero totale di prove analizzate. In accordo con l'Eq.(4.2), il valore dell'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , viene calcolato dalla seguente espressione:

$$T_{RMS} = 10^{E_{RMS}} \quad (5.2)$$

In *Figura 5.7* viene riportato il valore dell'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , valutato per le tre campagne sperimentali considerate alla Sezione 5.2.1.

Risulta evidente come l'accordo tra risultati analitici e sperimentali sia soddisfacente per i provini in AISI1034, mentre non risulta essere sufficientemente adeguato per i provini realizzati in Al7050-T7451 e in 35NCD16.



*Figura 5.7 Procedura 1: errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , per: Al7050-T7451 (Almeida, 2017), AISI1034 (Fouvry, 2008) e 35NCD16 (Baietto, 2013).*

È possibile definire un valore medio di  $T_{RMS}$ ,  $\bar{T}_{RMS}$ , indicativo dell'accuratezza della procedura considerata:

$$\bar{T}_{RMS} = \frac{\sum_{i=1}^J T_{RMS,i}}{J} \quad (5.3)$$

dove  $J$  è il numero di campagne sperimentali considerato. Per la presente procedura tale valore medio è pari a 2.00.

#### 5.2.2.2 Procedura 2

Nella presente procedura, la giacitura del piano di nucleazione della fessura viene assunta coincidente con il piano critico al centro di un volume strutturale. In

particolare, il concetto di volume strutturale, inizialmente proposto da Neuber (Neuber, 1936; Neuber, 1958), permette di tenere in considerazione l'effetto del gradiente tensionale nei componenti strutturali soggetti a concentrazione di sforzi.

In tale contesto, Susmel (Susmel, 2009) propose che in luogo di tale volume potesse essere considerata una sfera (un cerchio nei problemi piani) di diametro pari alla lunghezza di ElHaddad,  $L$  (Figura 5.8).

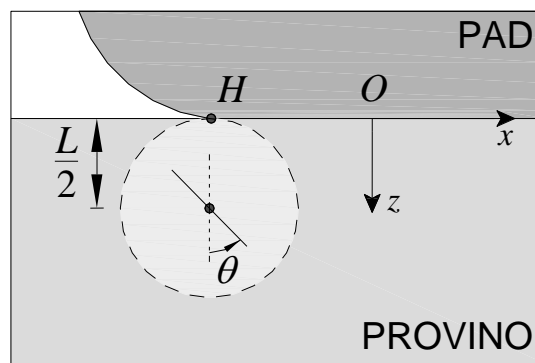


Figura 5.8 Procedura 2: rappresentazione schematica del metodo.

La giacitura del piano di nucleazione della fessura viene assunta coincidente con la giacitura del piano critico in corrispondenza del centro del volume strutturale. Si noti come, per la configurazione considerata, la presente procedura coincide con il *Point Method* della Teoria della Distanza Critica proposta da Taylor (Taylor, 1999; Taylor, 2007).

I valori di  $\theta_{anal}$  vengono riportati nella *Tabella 5.9*, insieme ai relativi dati sperimentali, per ognuna delle prove sperimentali analizzate.

Tabella 5.9 Procedura 2: giacitura del piano di nucleazione della fessura sperimentale e analitica, per le prove analizzate.

Materiale	Configurazione No.	Test No.	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]	$\theta_{anal}$ [°]
Al7050-T7451 (Almeida, 2017)	1	1	21.4±12.2	14.7
		2		
	2	3	29.5±6.4	14.8
		4		

		5		
	3	6	31.4±8.0	15.0
		7		
	4	8	25.9±5.4	14.8
		9		
	5	10	32.4±13.6	15.0
		11		
		12		
	6	13	35.7±9.6	15.2
		14		
		15		
AISI1034 (Fouvry, 2008)	1	1	30	33.1
35NCD16 (Bailetto, 2013)	1	1	13.4±2.9	4.8
		2		
		3		
	2	4	23.6±16.3	5.3
		5		
		6		
		7		
	3	8	13.8±9.2	5.7
		9		
		10		
		11		
		12		
	4	13	24.2±9.2	5.9
		14		
		15		
	5	16	19.8±13.2	6.1
		17		
		18		

Analogamente ai risultati ottenuti applicando la procedura 1, nella presente procedura l'accordo tra risultati analitici e sperimentali è soddisfacente per i provini realizzati in AISI1034, mentre non risulta essere sufficientemente accurato per i provini realizzati in Al7050-T7451 e in 35NCD16.

In particolare, in *Figura 5.9* viene riportato il valore di  $T_{RMS}$  per le campagne sperimentali considerate. È possibile notare come l'errore quadratico medio  $T_{RMS}$  per ognuno dei materiali considerati cresca sensibilmente rispetto ai medesimi

valori ottenuti applicando la procedura 1. Infatti, il calcolo di  $\bar{T}_{RMS}$ , in accordo con l'Eq.(5.3), fornisce un valore pari a 2.16, leggermente superiore al valore ottenuto applicando la procedura 1.

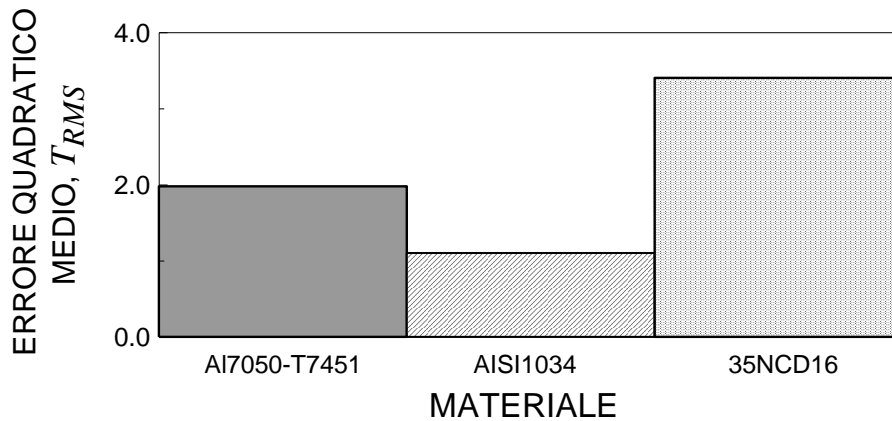


Figura 5.9 Procedura 2: errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , per: Al7050-T7451 (Almeida, 2017), AISI1034 (Fouvry, 2008) e 35NCD16 (Baietto, 2013).

### 5.2.2.3 Procedura 3: Critical Direction Method

La determinazione della giacitura del piano di nucleazione della fessura viene condotta applicando il *Critical Direction Method*, recentemente proposto da Araújo e collaboratori (Araújo, 2017), congiuntamente al criterio di Carpinteri e collaboratori.

Il *Critical Direction Method* permette, applicato insieme a qualsiasi criterio basato sul concetto del piano critico, di stimare la giacitura del piano di nucleazione della fessura, eseguendo una media tensionale lungo un percorso rettilineo di lunghezza pari a  $2L$  (Figura 5.10).

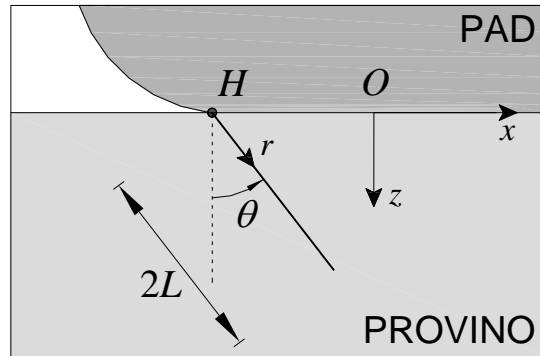


Figura 5.10 Procedura 3: rappresentazione schematica del metodo.

Infatti, da un punto di vista meccanico, appare ragionevole come la giacitura del piano di nucleazione della fessura, in situazioni caratterizzate da elevate variazioni del campo tensionale, non sia controllata dallo stato tensionale in un singolo punto, ma piuttosto da una media di tali tensioni relative ad una data regione di materiale (Araújo, 2002).

In particolare, l'applicazione congiunta del *Critical Direction Method* con il criterio di Carpinteri et al. si compone delle seguenti fasi:

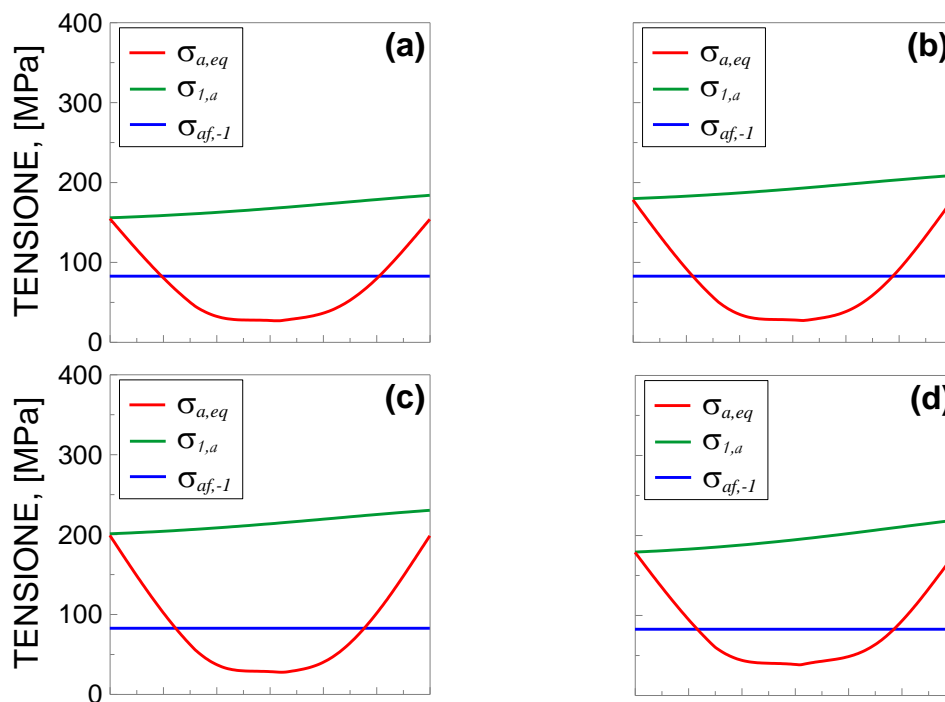
- (i) identificazione dell'*Hot-spot*  $H$  sulla superficie di contatto;
- (ii) individuazione di un segmento con origine in  $H$ , di lunghezza pari a  $2L$  e inclinato di un angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $z$  (Figura 5.10), che rappresenta la traccia di un piano, candidato ad essere il piano di nucleazione della fessura;
- (iii) determinazione, analitica o numerica, della storia di carico delle componenti di tensione normale,  $N$ , e tangenziale,  $C$ , in ogni punto del segmento di cui al punto (ii);
- (iv) determinazione del valore minimo e massimo di  $N$  e  $C$ ;
- (v) determinazione dell'ampiezza e del valore medio della componente di tensione normale,  $N_a$  e  $N_m$  rispettivamente, e dell'ampiezza della componente di tensione tangenziale,  $C_a$ . Si noti come, essendo il problema analizzato di tipo piano, la procedura descritta alla Sezione 3.2.1 per l'identificazione di  $C_a$  non si rende necessaria, poiché la direzione del vettore  $\mathbf{C}$  è fissa e ortogonale al segmento;
- (vi) determinazione dell'ampiezza della tensione equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , in accordo con l'Eq.(3.11), e relativa al generico orientamento  $\theta$ .



La procedura viene ripetuta variando  $\theta$  tra  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ .

Il piano di nucleazione della fessura, individuato dall'angolo  $\theta_{anal}$ , è assunto coincidente con il piano in corrispondenza del quale risulta soddisfatta la condizione limite di fatica del criterio di Carpinteri et al., ossia quando l'ampiezza della tensione equivalente eguaglia il limite di fatica per tensione normale alterna ( $\sigma_{a,eq} = \sigma_{af,-1}$ ). Se per più valori di  $\theta$  tale condizione risultasse soddisfatta, il piano di nucleazione della fessura viene assunto quello in corrispondenza del quale risulta massimizzata l'ampiezza della tensione principale.

In *Figura 5.11* sono riportate le ampiezze della tensione normale equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , e della tensione principale massima,  $\sigma_{1,a}$ , al variare dell'angolo  $\theta$ , per le prove condotte da Almeida e collaboratori, sui provini realizzati in Al7050-T7451.



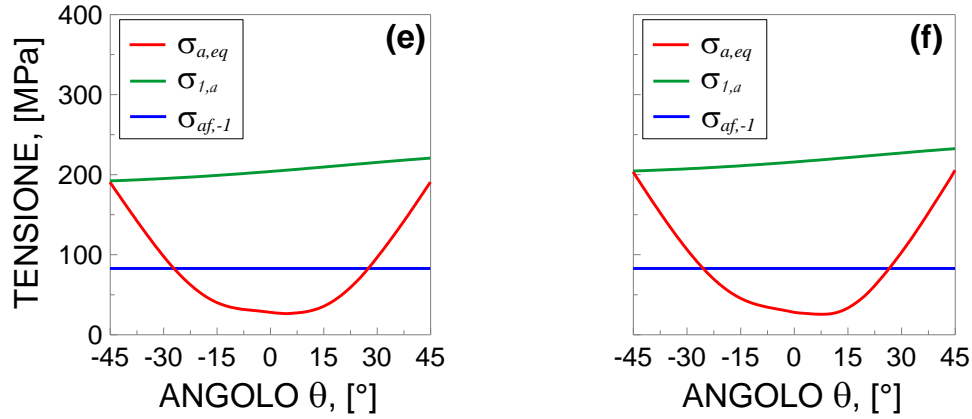


Figura 5.11 Procedura 3: ampiezza della tensione equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , e della tensione principale massima,  $\sigma_{1,a}$ , al variare dell'angolo  $\theta$ , per: (a)-(f) le sei configurazioni analizzate da Almeida et al. (Almeida, 2017).

Il valore analitico dell'angolo che individua il piano di nucleazione della fessura,  $\theta_{anal}$ , è rappresentato dall'ascissa del punto di intersezione tra la curva  $\sigma_{a,eq}$  e la retta  $\sigma_{af,-1}$ . Tali valori vengono riportati in Tabella 5.10, insieme ai relativi valori sperimentali.

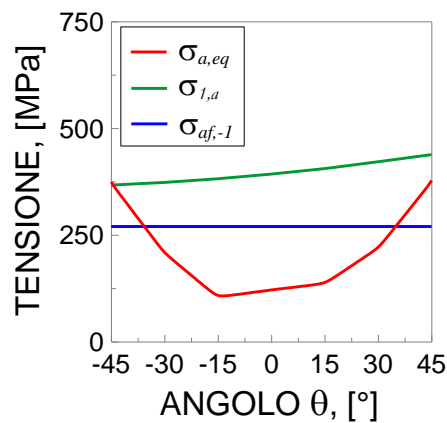
Tabella 5.10 Procedura 3: giacitura del piano di nucleazione della fessura sperimentale e analitica, per le prove analizzate da Almeida et al. (Almeida, 2017).

Configurazione No.	Test No.	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]	$\theta_{anal}$ [°]
1	1	21.4±12.2	30.7
	2		
2	3	29.5±6.4	28.3
	4		
	5		
3	6	31.4±8.0	26.6
	7		
4	8	25.9±5.4	27.8
	9		
5	10	32.4±13.6	27.6
	11		
	12		

6	13	35.7±9.6	26.6
	14		
	15		

L'accordo tra i risultati appare soddisfacente, essendo il valore di  $\theta_{anal}$  all'interno dell'intervallo  $\theta_{exp,m} \pm sqm$  per ognuno dei test considerati.

In *Figura 5.12* è mostrato l'andamento di  $\sigma_{a,eq}$  e di  $\sigma_{1,a}$  in funzione dell'angolo  $\theta$ , per le prove condotte da Fouvry e collaboratori sui provini realizzati in AISI1034.



*Figura 5.12* Procedura 3: ampiezza della tensione equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , e della tensione principale massima,  $\sigma_{1,a}$ , al variare dell'angolo  $\theta$ , per la configurazione analizzata da Fouvry et al. (Fouvry, 2008).

Il confronto appare soddisfacente, con un valore di  $\theta_{anal}$  pari a 32.15°, molto prossimo al valore sperimentale, pari a 30°.

Infine, in *Figura 5.13* è riportato l'andamento di  $\sigma_{a,eq}$  e di  $\sigma_{1,a}$  in funzione dell'angolo  $\theta$ , per le prove condotte da Baietto et al., sui provini realizzati in 35NCD16.

Per tale materiale, l'accuratezza dei risultati non è altrettanto soddisfacente, ottenendo valori analitici sovrastimati rispetto ai relativi valori sperimentali. Tali valori vengono riportati nella *Tabella 5.11*, per ognuna delle configurazioni analizzate.

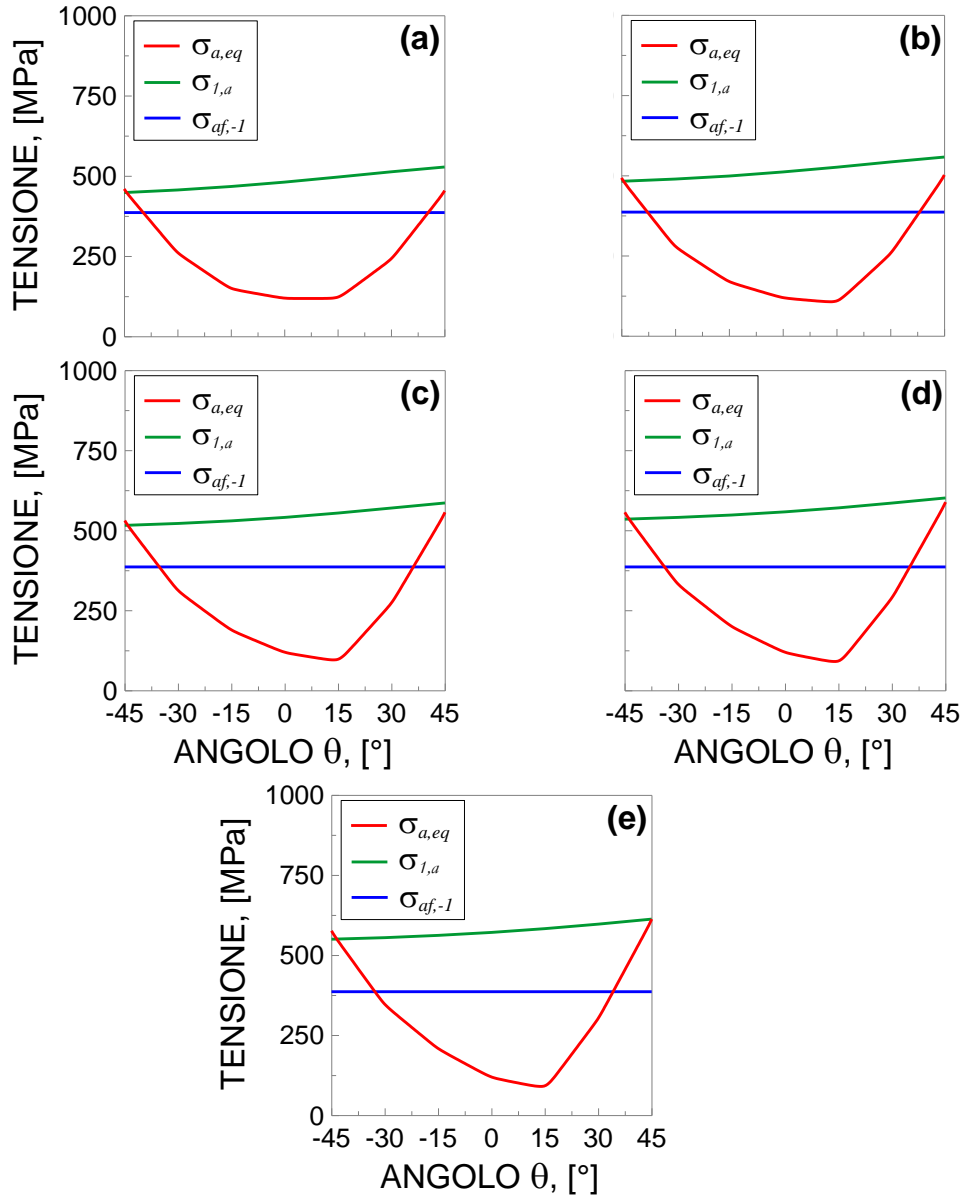


Figura 5.13 Procedura 3: ampiezza della tensione equivalente,  $\sigma_{a,eq}$ , e della tensione principale massima,  $\sigma_{1,a}$ , al variare dell'angolo  $\theta$ , per: (a)-(e) le cinque configurazioni analizzate da Baietto et al. (Baietto, 2013).

Tabella 5.11 Procedura 3: giacitura del piano di nucleazione della fessura sperimentale e analitica, per le prove sperimentali analizzate da Baietto et al. (Baietto, 2013).

Configurazione No.	Test No.	$\theta_{exp,m} + sqm$ [°]	$\theta_{anal}$ [°]
1	1	13.4±2.9	40.2
	2		
	3		
2	4	23.6±16.3	37.9
	5		
	6		
	7		
3	8	13.8±9.2	35.9
	9		
	10		
	11		
	12		
4	13	24.2±9.2	34.8
	14		
	15		
5	16	19.8±13.2	34.0
	17		
	18		

L'accuratezza del presente metodo viene valutata attraverso il calcolo dell'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , i cui valori vengono riportati in *Figura 5.14* per le tre campagne sperimentali considerate.

Appare evidente come la procedura 3 fornisca valori dell'errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , per ognuno dei materiali considerati, inferiori rispetto ai medesimi valori ottenuti impiegando le procedure 1 e 2. In particolare, il calcolo di  $\bar{T}_{RMS}$  fornisce un valore pari a 1.47, inferiore a entrambi i valori ottenuti applicando i precedenti metodi di media.

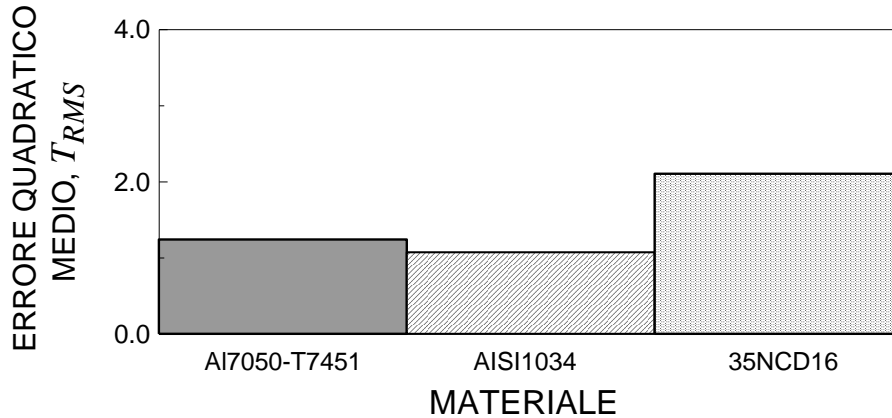


Figura 5.14 Procedura 3: errore quadratico medio,  $T_{RMS}$ , per: Al7050-T7451 (Almeida, 2017), AISI1034 (Fouvry, 2008) e 35NCD16 (Baietto, 2013).

### 5.3 Conclusioni

Nel presente Capitolo è stata trattata la determinazione del piano di nucleazione della fessura in presenza di contatto, con particolare riferimento al contatto cilindrico. Tale determinazione è stata condotta impiegando tre differenti procedure, che sfruttano il concetto di distanza critica, e che impiegano il criterio di fatica multiassiale basato sul piano critico, proposto da Carpinteri e collaboratori.

In particolare, la filosofia comune delle procedure proposte tiene in considerazione l'elevata variabilità dello stato tensionale in prossimità della superficie di contatto. Infatti, in situazioni caratterizzate da elevati gradienti tensionali, una variazione sensibile del punto in cui analizzare lo stato di tensione può portare ad una variazione considerevole dell'angolo di nucleazione della fessura.

A tal fine, vengono considerate tre diverse procedure, basate sul concetto di distanza critica e sull'impiego del criterio di Carpinteri et al.:

- (i) procedura 1, nella quale il piano di nucleazione della fessura viene valutato come media della giacitura dei piani critici, relativi a punti materiali disposti lungo un dato percorso curvo, di lunghezza pari a  $L$ ;

(ii) procedura 2, nella quale il piano di nucleazione della fessura viene assunto coincidente con il piano critico al centro di una regione di materiale, detta volume strutturale;

(iii) procedura 3, nella quale si impiega il *Critical Direction Method* per determinare il piano di nucleazione della fessura, massimizzando l'ampiezza della tensione equivalente, valutata applicando il criterio di Carpinteri et al.

Tali procedure vengono, poi, validate impiegando dati sperimentali reperiti in letteratura, relativi a contatti cilindrici, su provini realizzati in A17050-T7451, AISI1034 e 35NCD16.

La procedura 1 fornisce un accordo soddisfacente tra risultati analitici e risultati sperimentali per i provini realizzati in AISI1034, con un errore quadratico medio pari a 1.13. Tuttavia, per i provini realizzati in A17050-T7451 e in 35NCD16 il piano di nucleazione è correttamente stimato procedere verso l'interno della superficie di contatto, ma la giacitura del piano sperimentale non risulta essere stimata con sufficiente accuratezza, fornendo un valore dell'errore quadratico medio pari a, rispettivamente, 1.89 e 2.99.

La procedura 2, analogamente alla procedura 1, fornisce un livello di accuratezza adeguato per i provini realizzati in AISI1034, con un errore quadratico medio pari a 1.10. Invece, per i provini in A17050-T7451 e in 35NCD16 l'angolo di nucleazione risulta essere eccessivamente sottostimato, con un valore dell'errore quadratico medio pari a 1.98 e 3.4, rispettivamente.

Infine, la procedura 3 risulta essere sufficientemente accurata nella stima della giacitura del piano di nucleazione della fessura. Infatti, nonostante tenda a sovrastimare l'angolo di nucleazione nei provini realizzati in 35NCD16, fornendo un valore dell'errore quadratico medio pari a 2.10, l'accordo tra i risultati analitici e quelli sperimentali per i provini in AISI1034 e in A17050-T7451 è soddisfacente, con valori dell'errore quadratico medio pari a 1.07 e 1.24, rispettivamente.

Tali procedure rappresentano, quindi, uno strumento promettente nella stima della giacitura del piano di nucleazione della fessura, non solo nella fatica da contatto ma anche in altre applicazioni caratterizzate dalla presenza di elevati gradienti tensionali. Tuttavia, è necessario sottolineare come le validazioni condotte nel presente Capitolo sono relative a tensioni applicate, al solo provino, di tipo statico. Quindi, al fine di definire conclusioni più solide e di carattere

generale, è necessario considerare ulteriori test e analisi sugli effetti indotti dalla presenza di una tensione ciclica sul provino, nella stima della giacitura del piano di nucleazione della fessura.



## 5.4 Bibliografia

- Almeida G.M.J. (2017) *Ensaio e avaliação da direção de iniciação de trinca sob condições de fretting*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília.
- Araújo J.A., Nowell D. (2002) The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue. *International Journal of Fatigue* 24, 763-775.
- Araújo J.A., Mamiya E.N. (2003) The application of a mesoscopic scale approach in fretting fatigue. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 25, 41-45.
- Araújo J., Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) An alternative definition of the shear stress amplitude based on the maximum rectangular hull method and application to the C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 764-771.
- Araújo J.A., Almeida G.M.J., Ferreira J.L.A., da Silva C.R.M., Castro F.C. (2017) Early cracking orientation under high stress gradients: The fretting case. *International Journal of Fatigue* 100, 611-618.
- Baietto M.C., Pierres E., Gravouil A., Berthel B., Fouvry S., Trolle B. (2013) Fretting fatigue crack growth simulation based on a combined experimental and XFEM strategy. *International Journal of Fatigue* 47, 31-43.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Multiaxial fatigue life estimation in welded joints using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 31, 188-196.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. (2013) Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 870-883.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.

- Cheng W., Cheng H.S., Mura T., Keer L.M. (1994) Micromechanics modeling of crack initiation under contact fatigue. *Journal of Tribology, Trans. ASME* 116, 2-8.
- ElHaddad M.H., Dowling N.F., Topper T.H., Smith K.N. (1980) J Integral applications for short fatigue cracks at notches. *International Journal of Fracture* 16, 15-24.
- Fouvry S., Duó P., Perruchaut P. (2004) A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage: friction, wear and crack nucleation. *Wear* 257, 916-929.
- Fouvry S., Nowell D., Kubiak K., Hills D.A. (2008) Prediction of fretting crack propagation based on a short crack methodology. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1605-1622.
- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Namjoshi S.A., Mall S., Jain V.K., Jin O. (2002) Fretting fatigue crack initiation mechanism in Ti-6Al-4V. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 25, 955-964.
- Neu R.W., Pape J.A., Swalla-Michaud D.R. (1999) Methodologies for linking nucleation and propagation approaches for predicting life under fretting fatigue. In: Hoepfner D.W. Chandrasekaran V., Elliott C.B., editors. *Fretting fatigue: current technology and practices*. ASTM STP 1367, Philadelphia, 369-388.
- Neuber H. (1936) Zur theorie der technischen formzahl. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A* 7, 271-281.
- Neuber H. (1958) *Theory of notch stresses*. Springer, Berlin.
- Ruiz C., Chen K.C. (1986) Life assessment of dovetail joints between blades and discs in aero-engines. *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Engineering Materials and Structures* 2, 187-194.
- Smith K.N., Watson P., Topper T.H. (1970) A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials* 5, 767-778.
- Susmel L. (2009) *Multiaxial Notch Fatigue: from nominal to local stress-strain quantities*. Woodhead & CRC, Cambridge.
- Szolwinski M.P., Farris T.N. (1996) Mechanics of fretting fatigue crack formation. *Wear* 198, 93-107.

- Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.
- Taylor D. (2007) *The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics*. Elsevier, Oxford.
- Vantadori S., Almeida G.M.J., Fortese G., Pessoa G.C.V., Araújo J.A. (2018) Early fretting crack orientation by using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 114, 282-288.
- Vázquez J., Navarro C., Domínguez J. (2017) Analysis of fretting fatigue crack initial crack path in Al7075-T651 using cylindrical contact. *Tribology International* 108, 87-94.



## NOMENCLATURA

## NOMENCLATURE

AM	<i>Area Method</i> della Teoria della Distanza Critica
FPZ	<i>Fatigue Process Zone</i>
LC	<i>Longest Chord method</i>
LM	<i>Line Method</i> della Teoria della Distanza Critica
LP	<i>Longest Projection method</i>
MBC	<i>Minimum Bounding Circle method</i>
MRH	<i>Maximum Rectangular Hull method</i>
PM	<i>Point Method</i> della Teoria della Distanza Critica
TCD	Teoria della Distanza Critica
$\alpha, \beta$	parametri approccio non-locale 2 (Capitolo 4)
$\alpha_{LM}, \beta_{LM}$	parametri approccio non-locale 3 (Capitolo 4)
$\alpha_{AM}, \beta_{AM}$	parametri approccio non-locale 4 (Capitolo 4)
$\delta$	angolo compreso tra la normale $\mathbf{w}$ al piano critico e la direzione media $\hat{1}$ della massima tensione principale
$\Delta K_{I,th}$	valore di soglia del fattore di intensità degli sforzi
$\Delta\sigma_{H,max}$	tensione idrostatica nell' <i>Hot-spot</i>
$\bar{\nabla}\sigma_H$	gradiente medio tensione idrostatica nell' <i>Hot-spot</i>
$\bar{\nabla}\sigma_{H,I}$	valore soglia inferiore del gradiente tensionale (Capitolo 3)
$\bar{\nabla}\sigma_{H,II}$	valore soglia superiore del gradiente tensionale (Capitolo 3)

$\bar{\nabla}\sigma_{H,LB}$	valore limite minimo del gradiente tensionale (Capitolo 3)
$\bar{\nabla}\sigma_{H,MB}$	valore limite intermedio del gradiente tensionale (Capitolo 3)
$\bar{\nabla}\sigma_{H,UB}$	valore limite massimo del gradiente tensionale (Capitolo 3)
$\nabla\sigma_x$	gradiente tensione longitudinale
$\varepsilon_s$	deformazione in corrispondenza dello snervamento
$\mu$	coefficiente di attrito
$\nu$	coefficiente di Poisson
$\sigma$	tensore degli sforzi
$\sigma_{a,eq}$	ampiezza tensione equivalente relativa al piano critico
$\sigma_{af,-1}$	limite a fatica per tensione normale alterna
$\sigma'_{af,-1}$	resistenza a fatica per tensione normale alterna a vita finita
$\sigma_B$	tensione ciclica
$\sigma_{B,a}$	ampiezza tensione ciclica
$\sigma_{eff}$	tensione effettiva della Teoria della Distanza Critica
$\tilde{\sigma}_{eff}$	tensione effettiva del metodo di Pluinage
$\sigma_i, \quad i = x, y, z$	componenti di tensione normale
$\sigma_n, \quad n = 1, 2, 3$	tensioni principali, con $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t) \geq \sigma_3(t)$
$\sigma_u$	resistenza ultima a trazione del materiale
$\sigma_{x,H}$	tensione longitudinale nell' <i>Hot-spot</i>
$\Sigma$	percorso descritto dalla tensione tangenziale sul piano critico
$\Sigma'$	poligonale a $n$ vertici che discretizza il percorso $\Sigma$
$\tau_{af,-1}$	limite a fatica per tensione tangenziale alterna
$\tau'_{af,-1}$	resistenza a fatica per tensione tangenziale alterna a vita finita

$\tau_{ij}, \quad i, j = x, y, z$	componenti di tensione tangenziale
$\phi, \theta, \psi$	angoli principali di Eulero
$\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$	angoli principali medi di Eulero
$\theta_{anal}$	angolo di nucleazione della fessura determinato analiticamente
$\theta_{exp}$	angolo di nucleazione della fessura determinato sperimentalmente
$\chi$	gradiente tensionale relativo (Capitolo 3)
$a$	semi-larghezza regione di contatto
$c$	semi-larghezza regione di aderenza
$c'$	semi-larghezza istantanea regione di aderenza
$C$	vettore tensione tangenziale (agente sul piano critico)
$C_a$	ampiezza tensione tangenziale
$C_m$	valore medio tensione tangenziale
$d_c$	distanza critica
$d_{c,opt}$	distanza critica ottimale
$e$	eccentricità regione di aderenza
$e'$	eccentricità istantanea regione di aderenza
$E$	modulo di elasticità
$E^*$	modulo di elasticità per stato piano di deformazione
$E_{RMS}$	errore scarto quadratico medio logaritmico
$FI$	Indice di Fretting
$G$	modulo di elasticità tangenziale
$h$	distanza tra due superfici
$H$	<i>Hot-spot</i>
$l$	profondità corpo
$L$	distanza critica proposta da ElHaddad

$L_F$	distanza critica proposta da Fouvry
$L_M$	distanza critica proposta da Susmel
$m$	pendenza curva $S - N$ per tensione normale alterna
$m^*$	pendenza curva $S - N$ per tensione tangenziale alterna
$\mathbf{N}$	vettore tensione normale (perpendicolare al piano critico)
$N_a$	ampiezza tensione normale
$N_{a,eq}$	ampiezza tensione normale equivalente
$\overline{N}_{a,eq}$	valore medio ampiezza tensione normale equivalente
$N_f$	numero di cicli a rottura
$N_m$	valore medio tensione normale
$N_0$	numero cicli di carico di riferimento
$O$	origine del sistema di riferimento
$P$	distribuzione di carico normale sulla superficie di contatto
$p_0$	valore massimo della distribuzione di carico normale
$P$	forza normale alla superficie di contatto
PXYZ	sistema di riferimento fisso
Puvw	sistema di riferimento locale relativo al piano critico
P123	sistema di riferimento con assi coincidenti con le direzioni principali di tensione
$q$	distribuzione di carico tangenziale sulla superficie di contatto
$Q$	forza tangenziale alla superficie di contatto
$Q_a$	ampiezza forza tangenziale alla superficie di contatto
$r$	distanza dall'origine del sistema di riferimento
$R$	raggio di curvatura relativa
$s$	spostamento tra due punti
$sqm$	scarto quadratico medio



$\mathbf{S}_w$	vettore tensione agente sul piano critico
$t$	tempo
$T$	periodo
$T_{RMS}$	errore quadratico medio
$\bar{T}_{RMS}$	valore medio errore quadratico medio
$u$	spostamenti
$\bar{u}$	spostamenti in corrispondenza della superficie di contatto
$\mathbf{w}$	vettore normale al piano critico
$W$	funzione peso
$x_{eff}$	distanza effettiva (Capitolo 3)

### Pedici

$a$	ampiezza
$cal$	analitico
$exp$	sperimentale
$m$	valore medio
$max$	valore massimo
$min$	valore minimo
$P$	relativo al carico normale $P$
$Q$	relativo al carico tangenziale $Q$
$r$	relativo alla distanza dall'origine del sistema di riferimento
$x$	relativo alla direzione $x$
$y$	relativo alla direzione $y$
$z$	relativo alla direzione $z$
1	relativo al corpo 1
2	relativo al corpo 2



## LISTA DELLE PUBBLICAZIONI

---

### LIST OF PUBLICATIONS

#### Note su Riviste Internazionali

Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2016) Spectral fatigue life estimation for non-proportional multiaxial random loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 83, 67-72.

Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Spagnoli A., Vantadori S. (2016) Fatigue life evaluation of metallic structures under multiaxial random loading. *International Journal of Fatigue* 90, 191-199.

Berto F., Campagnolo A., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2016) Fatigue assessment of notched specimens by means of a critical plane-based criterion by employing energy concepts. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 84, 57-63.

Fortese G., Carpinteri A., Di Cocco V., Iacoviello F., Natali S., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2016) Improved Zn-based coatings for ipersandelin steel products. *Procedia Structural Integrity* 2, 2263-2268.

Vantadori S., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2016) Mode I fracture toughness of fibre-reinforced concrete by means of a modified version of the two-parameter model. *Procedia Structural Integrity* 2, 2889-2895.

Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Tasora A., Vantadori S. (2016) Dynamic shieldings for cultural heritage buildings under seismic action. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 89, 269-276.

- Vantadori S., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2016) Two-parameter fracture model for cortical bone. *Frattura e Integrità Strutturale* 37, 215-220.
- Di Cocco V., Iacoviello F., Natali S., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Kinetics of intermetallic phases and mechanical behaviour of ZnSn3% hot-dip galvanized coatings. *Advanced Engineering Materials* 18, 2088-2094.
- Carpinteri A., Boaretto J., Fortese G., Giordani F., Iturrioz I., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Fatigue life estimation of fillet-welded tubular T-joints subjected to multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* 101, 263-270.
- Ronchei C., Carpinteri A., Fortese G., Scorza D., Vantadori S. (2017) Fretting high-cycle fatigue assessment through a multiaxial critical plane-based criterion in conjunction with the Taylor's point method. *Solid State Phenomena* 258, 217-220.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Muniz-Calvente M., Fernández-Canteli A. (2017) Probabilistic failure assessment of Fibreglass composites. *Composite structures* 160, 1163-1170.
- Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Berto F. (2017) Joined application of a multiaxial critical plane criterion and a strain energy density criterion in low-cycle fatigue. *Frattura e Integrità Strutturale* 11, 66-70.
- Carpinteri A., Berto F., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Modified two-parameter fracture model for bone. *Engineering Fracture Mechanics* 174, 44-53.
- Vantadori S., Fortese G., Ronchei C., Scorza D. (2017) A stress gradient approach for fretting fatigue assessment of metallic structural components. *International Journal of Fatigue* 101, 1-8.
- Vantadori S., Boaretto J., Fortese G., Giordani F., Rodrigues R.I., Iturrioz I., Ronchei C., Scorza D., Zanichelli A. (2017) Fatigue strength of welded joints under multiaxial non-proportional loading. *Procedia Structural Integrity* 5, 761-768.

- 
- Vantadori S., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Zanichelli A. (2017) Fatigue lifetime evaluation of notched components: Implementation of the control volume concept in a strain-based LCF criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 97, 400-408.
- Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Mode I fracture toughness of fibre reinforced concrete. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 91, 66-75.
- Vantadori S., Carpinteri A., Di Cocco V., Fortese G., Iacoviello F., Natali S., Ronchei C., Scorza D., Zanichelli A. (2017) Novel zinc-based alloys used to improve the corrosion protection of metallic substrates. *Engineering Failure Analysis* 82, 327-339.
- Vantadori S., Haynes R., Fortese G., Habtour E., Ronchei C., Scorza D., Zanichelli A. (2018) Methodology for assessing embryonic cracks development in structures under high-cycle multiaxial random vibrations. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 41, 20-28.
- Carpinteri A., Boaretto J., Fortese G., Giordani F., Rodrigues R.I., Iturrioz I., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Zanichelli A. (2018) Welded joints under multiaxial non-proportional loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 93, 202-210.
- Vantadori S., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C. (2018) Influence of random loading non-proportionality on damage. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 96, 56-63.
- Scorza D., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Vantadori S., Zanichelli A. (2018) Multiaxial fatigue life estimation in low-cycle fatigue regime including the mean stress effect. *MATEC Web of Conferences* 165, 16002.
- Vantadori S., Almeida G.M.J., Fortese G., Pessoa G.C.V., Araújo J.A. (2018) Early fretting crack orientation by using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 114, 282-288.

Vantadori S., Giordani F., Fortese G., Iturrioz I. (2018) Hot-spot localisation according to the critical plane-based approach. *International Journal of Fatigue* 116, 669-676.

Carpinteri A., Di Cocco V., Fortese G., Iacoviello F., Natali S., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Zanichelli A. (2018) Mechanical behaviour and phase transition mechanisms of a shape memory alloy by means of a novel analytical model. *Acta mechanica et automatica* 12, 2.

Vantadori S., Fortese G., Carpinteri A. (2018) Shape of the power spectral density matrix components: influence on fatigue damage. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, sottomesso.

### **Note a Congressi**

Ronchei C., Carpinteri A., Fortese G., Scorza D., Vantadori S. (2016) Fretting high-cycle fatigue assessment through a multiaxial critical plane-based criterion in conjunction with the Taylor's point method. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> Materials Structure & Micromechanics of Fracture (MSMF8)*, Brno, Repubblica Ceca.

Fortese G., Berto F., Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Analysis of crack initiation under fretting fatigue loading. *Proceeding of the International Symposium on Notch Fracture (ISNF)*, Santander, Spagna.

Carpinteri A., Di Cocco V., Fortese G., Iacoviello F., Natali S., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Zanichelli A. (2017) Fatigue behaviour of a shape memory alloy. *Proceedings of 9<sup>th</sup> International Symposium on Mechanics of Materials and Structures (ISMMS)*, Augustow, Polonia.

Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Zanichelli A. (2017) Fracture toughness of micro-synthetic polypropylene fibrillated fibre reinforced concrete. *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Congresso Associazione Italiana Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA)*, Salerno, Italia.

Zanichelli A., Rooholamini H., Hassani A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Fracture toughness of hybrid fibre reinforced concrete.

- 
- Proceedings of the 25<sup>th</sup> annual International Conference on Composites/Nano Engineering (ICCE25)*, Roma, Italia.
- Carpinteri A., Fortese G., Guo L.P., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2017) Fracture toughness of concrete reinforced by metallic fibres. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Mechanics of Composites (MECHCOMP3)*, Bologna, Italia.
- Scorza D., Muñoz-Calvente M., Carpinteri A., Fernández-Canteli A., Fortese G., Ronchei C., Vantadori S. (2017) Generalised probabilistic approach applied to fibreglass. *Proceedings of the 20<sup>th</sup> International Conference on Composite Structures (ICCS20)*, Parigi, Francia.
- Fortese G., Carpinteri A., Vantadori S., Zanichelli A. (2018) Stress gradient effect in estimating fretting fatigue life. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> Contact Mechanics International Symposium (CMIS2018)*, Biella, Italia.
- Zanichelli A., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2018) Fracture behaviour of hybrid roller-compacted concrete. *Proceedings of the 26<sup>th</sup> International Conference on Composites/Nano Engineering (ICCE26)*, Parigi, Francia.
- Zanichelli A., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2018) Contribution of date-palm fibres reinforcement to mortar fracture toughness. *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> European Conference on Fracture (ECF22)*, Belgrado, Serbia.
- Zanichelli A., Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2018) Numerical modeling of hybrid roller-compacted concrete under monotonic and cyclic loading. *Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference on Composite Structures (ICCS21)*, Bologna, Italia.
- Fortese G., Carpinteri A., Iturrioz I., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S., Zanichelli A. (2018) A novel hot-spot stress calculation for tubular welding joints used in agricultural sprayers. *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Colloquium on Mechanical Fatigue of Metals (ICMFM XIX)*, Porto, Portogallo.

Fortese G., Carpinteri A., Vantadori S., Almeida G.M.J., Pessoa G.C.V., Araújo J.A. (2018) Estimation of crack paths at initiation stage under fretting high-cycle fatigue. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Crack Paths (CP2018)*, Verona, Italia.







*Desidero ringraziare, innanzitutto, la Professoressa Sabrina Vantadori, per la fiducia dimostratami e per avermi dato la possibilità di svolgere, con lei, il mio Dottorato di ricerca. La crescita dal punto di vista professionale e, prima ancora, umano che ho avuto negli ultimi tre anni la devo soprattutto a lei.*

*Un sentito ringraziamento anche al Professore Andrea Carpinteri, sempre disponibile e cordiale. Un punto di riferimento in questo mio percorso, mai assente con i suoi preziosi consigli.*

*Vorrei inoltre ringraziare Camilla, Daniela e Andrea: sono stato fortunato ad aver lavorato insieme a loro, mi hanno permesso di affrontare il Dottorato in compagnia di ottimi insegnanti, colleghi, amici. E in allegria.*

*Un grande ringraziamento va ai miei genitori, Salvatore e Rosetta, per i valori che mi hanno trasmesso e che un giorno spero riuscirò a trasferire anche io ai miei figli. Spero di averli resi fieri almeno la metà di quanto sono fiero io di loro.*

*Un grazie anche ai miei fratelli, Domenico e Gessica, sempre presenti per me. È stato, e sarà, bello crescere con persone come loro, su cui poter sempre contare, senza mai esitazione.*

*Un ringraziamento speciale va anche ai miei nonni, Giuseppina e Nicola. Si dice che un nonno abbia l'argento nei capelli e l'oro nel cuore. Sono orgoglioso di poterlo confermare.*

*Vorrei ringraziare anche Giuseppe, Monica e Sofia, insieme ai nonni Marisa e Giacomo, per avermi accolto fin da subito con affetto e amore. Non è sempre facile avere una vera famiglia, io ne ho addirittura due.*

*Un semplice, ma non-banale, "Grazie" a tutti i miei parenti e amici. Si dice che siamo la conseguenza delle nostre scelte, e l'avervi scelto nella mia vita ha fatto sì che ognuno di voi abbia contribuito al raggiungimento di questo traguardo.*

*Infine, il ringraziamento più grande di tutti va a Martina. Non ci sono parole per descrivere il ruolo che occupa nella mia vita. L'amore che mi trasferisce ogni giorno mi rende l'uomo più fortunato su questa Terra, e se mi volto indietro, so che non sarei mai arrivato fino a qui senza di lei.*

*La ringrazio di esistere.*

*E di avermi scelto.*