



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

**SCUOLA DI DOTTORATO IN INGEGNERIA CIVILE E ARCHITETTURA
DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA CIVILE
XXVIII CICLO – CURRICULUM MECCANICA STRUTTURALE**

**SVILUPPO E APPLICAZIONE DI NUOVI CRITERI
PER LA VERIFICA A FATICA MULTIASSIALE
DI COMPONENTI STRUTTURALI
IN LEGHE DI ACCIAIO E ALLUMINIO**

Dottoranda:
Ing. Camilla Ronchei

Relatore:
Prof.ssa Sabrina Vantadori

Coordinatore:
Chiar.mo Prof. Gianfranco Forlani

Tutore:
Chiar.mo Prof. Andrea Carpinteri

Gennaio 2016

SOMMARIO

La presente Tesi ha per oggetto lo sviluppo e la validazione di nuovi criteri per la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali metallici . In particolare, i nuovi criteri formulati risultano applicabili a componenti metallici, soggetti ad un'ampia gamma di configurazioni di carico: carichi multiassiali variabili nel tempo, in modo ciclico e random, per alto e basso/medio numero di cicli di carico. Tali criteri costituiscono un utile strumento nell'ambito della valutazione della resistenza/vita a fatica di elementi strutturali metallici, essendo di semplice implementazione, e richiedendo tempi di calcolo piuttosto modesti.

Nel *primo Capitolo* vengono presentate le problematiche relative alla fatica multiassiale, introducendo alcuni aspetti teorici utili a descrivere il meccanismo di danneggiamento a fatica (propagazione della fessura e frattura finale) di componenti strutturali metallici soggetti a carichi variabili nel tempo. Vengono poi presentati i diversi approcci disponibili in letteratura per la verifica a fatica multiassiale di tali componenti, con particolare attenzione all'approccio del piano critico. Infine, vengono definite le grandezze ingegneristiche correlate al piano critico, utilizzate nella progettazione a fatica in presenza di carichi multiassiali ciclici per alto e basso/medio numero di cicli di carico.

Il *secondo Capitolo* è dedicato allo sviluppo di un nuovo criterio per la valutazione della resistenza a fatica di elementi strutturali metallici soggetti a carichi multiassiali ciclici e alto numero di cicli. Il criterio risulta basato sull'approccio del piano critico ed è formulato in termini di tensioni. Lo sviluppo del criterio viene affrontato intervenendo in modo significativo su una precedente formulazione proposta da Carpinteri e collaboratori nel 2011. In particolare, il primo intervento riguarda la determinazione della giacitura del piano critico: nuove

espressioni dell'angolo che lega la giacitura del piano critico a quella del piano di frattura vengono implementate nell'algoritmo del criterio. Il secondo intervento è relativo alla definizione dell'ampiezza della tensione tangenziale e un nuovo metodo, noto come Prismatic Hull (PH) method (di Araújo e collaboratori), viene implementato nell'algoritmo. L'affidabilità del criterio viene poi verificata impiegando numerosi dati di prove sperimentali disponibili in letteratura.

Nel *terzo Capitolo* viene proposto un criterio di nuova formulazione per la valutazione della vita a fatica di elementi strutturali metallici soggetti a carichi multiassiali ciclici e basso/medio numero di cicli. Il criterio risulta basato sull'approccio del piano critico, ed è formulato in termini di deformazioni. In particolare, la formulazione proposta trae spunto, come impostazione generale, dal criterio di fatica multiassiale in regime di alto numero di cicli discusso nel *secondo Capitolo*. Poiché in presenza di deformazioni plastiche significative (come quelle caratterizzanti la fatica per basso/medio numero di cicli di carico) è necessario conoscere il valore del coefficiente efficace di Poisson del materiale, vengono impiegate tre differenti strategie. In particolare, tale coefficiente viene calcolato sia per via analitica, che per via numerica, che impiegando un valore costante frequentemente adottato in letteratura. Successivamente, per validarne l'affidabilità vengono impiegati numerosi dati di prove sperimentali disponibili in letteratura; i risultati numerici sono ottenuti al variare del valore del coefficiente efficace di Poisson. Inoltre, al fine di considerare i significativi gradienti tensionali che si verificano in presenza di discontinuità geometriche, come gli intagli, il criterio viene anche esteso al caso dei componenti strutturali intagliati. Il criterio, riformulato implementando il concetto del volume di controllo proposto da Lazzarin e collaboratori, viene utilizzato per stimare la vita a fatica di provini con un severo intaglio a V, realizzati in lega di titanio grado 5.

Il *quarto Capitolo* è rivolto allo sviluppo di un nuovo criterio per la valutazione del danno a fatica di elementi strutturali metallici soggetti a carichi multiassiali random e alto numero di cicli. Il criterio risulta basato sull'approccio del piano critico ed è formulato nel dominio della frequenza. Lo sviluppo del criterio viene affrontato intervenendo in modo significativo su una precedente formulazione proposta da Carpinteri e collaboratori nel 2014. In particolare, l'intervento riguarda la determinazione della giacitura del piano critico, e nuove

espressioni dell'angolo che lega la giacitura del piano critico con quella del piano di frattura vengono implementate nell'algoritmo del criterio. Infine, l'affidabilità del criterio viene verificata impiegando numerosi dati di prove sperimentali disponibili in letteratura.

ABSTRACT

The present Ph.D. Thesis deals with the development and validation of new criteria for multiaxial fatigue assessment of metallic structural components subjected to multiaxial variable (cyclic or random) loadings, under either high-cycle fatigue (HCF) or low/medium-cycle fatigue (LCF). Since the above criteria are easy to implement and do not require long computational times, they represent an useful tool in the assessment of fatigue strength/life.

Chapter 1 summarises the main issues concerning multiaxial fatigue, by introducing some theoretical aspects useful for describing the fatigue damage mechanisms (crack propagation and final fracture) related to metallic structural components subjected to variable loadings. Then, the different methods available in the literature to assess multiaxial fatigue are examined, with particular attention to the critical plane approach. Finally, the engineering quantities related to the above approach and employed in fatigue design for high and low/medium number of loading cycles are defined.

A new criterion for fatigue strength evaluation of metallic structural components subjected to multiaxial constant-amplitude cyclic loadings with high number of cycles is presented in *Chapter 2*. Such a criterion is based on the critical plane approach, and is developed in terms of stresses by modifying a previous formulation proposed by Carpinteri and co-workers in 2011. In particular, the first modification concerns the implementation of different relationships (available in the literature) related to the critical plane orientation. The second modification is related to the definition of the shear stress amplitude and, in particular, the Prismatic Hull (PH) method proposed by Araújo and co-workers is implemented in

the present criterion. Then, the effectiveness of the new formulations is analysed by employing some experimental data found in the literature.

A new criterion for fatigue life evaluation of metallic structural components subjected to multiaxial constant-amplitude cyclic loadings with low/medium number of cycles is proposed in *Chapter 3*. This criterion is based on the critical plane approach, and is developed in terms of strains. In particular, the proposed formulation is inspired by the high-cycle multiaxial fatigue criterion discussed in *Chapter 2*. Since the effective Poisson ratio of the material has to be known when significant plastic deformations occur (such as in low/medium-cycle fatigue regime), three different methods are employed to determine this parameter: (i) analytical approach, (ii) non-linear finite element analysis, (iii) assumption of a constant value (often used in the literature). Then, the effectiveness of the criterion is analysed by comparing experimental data available in the literature with numerical results computed for different values of the effective Poisson ratio. Moreover, in order to take into account the influence of significant stress gradients which occur in presence of geometrical discontinuities (such as notches), the criterion is extended to the case of notched structural components. The criterion, reformulated by implementing the concept of the control volume proposed by Lazzarin and co-workers, is employed for fatigue life estimation of V-notched specimens made of grade 5 titanium alloy.

Finally, a new criterion for fatigue strength evaluation of metallic structural components subjected to multiaxial random loadings with high number of cycles is presented in *Chapter 4*. Such a criterion is based on the critical plane approach, and is developed in the frequency-domain by modifying a previous formulation proposed by Carpinteri and co-workers in 2014. In particular different relationships (available in the literature) related to the critical plane orientation are implemented in the present criterion. Finally, the effectiveness of the new formulation is analysed by employing some experimental data found in the literature.

LISTA DELLE PUBBLICAZIONI

Note su Riveste Internazionali

- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2014) An alternative definition of the shear stress amplitude based on the Maximum Rectangular Hull method and application to the C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 764-771.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) On the use of the Prismatic Hull method in a critical plane-based multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue* 68, 159-167.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) A strain-based multiaxial fatigue criterion connected to the critical plane approach. *Procedia Engineering* 74, 317-320.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) Lifetime estimation in the low/medium-cycle regime using the Carpinteri-Spagnoli multiaxial fatigue criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73, 120-127.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane criterion for fatigue life calculation: time and frequency domain formulations. *Procedia Engineering* 101, 518-523.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Ronchei C., Vantadori S. (2015) Time and frequency domain models for multiaxial fatigue life estimation under random loading. *Frattura ed Integrità Strutturale* 33, 376-381.

Ronchei C., Carpinteri A., Fortese G., Spagnoli A., Vantadori S., Kurek M., Łagoda T. (2015) Life estimation by varying the critical plane orientation in the modified Carpinteri-Spagnoli criterion. *Frattura ed Integrità Strutturale* 34, 74-79.

Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Fatigue life estimation for multiaxial low-cycle fatigue regime: the influence of the effective Poisson ratio value. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 79, 77-83.

Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.

Carpinteri A., Fortese G., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Spectral fatigue life estimation for non-proportional multiaxial random loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, in stampa.

Note a Congresso

Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2013) An alternative definition of the shear stress amplitude for the modified C-S (Carpinteri - Spagnoli) criterion. In: *Proceedings 3th International Conference of Engineering Against Failure (ICEAF III)*, Kos Island, Grecia.

Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2013) MRH method and modified C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. In: *Atti del XXI Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA 2013)*, Torino.

Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) Estensione del criterio C-S modificato per fatica a basso/medio numero di cicli. In: *Atti del 43° Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni (AIAS 2014)*, Rimini.

Vantadori S., Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D. (2015) A frequency-domain HCF criterion for biaxial random loading. In: *Proceedings 4th International Conference of Engineering Against Failure (ICEAF IV)*, Skiathos, Grecia.

NOMENCLATURA

DK	metodo di Dirlik
<i>I</i>	indice d'errore
LC	metodo Longest Chord
LCC	metodo Level Crossing Counting
LP	metodo Longest Projection
MBC	metodo Minimum Bounding Circle
MCE	metodo Minimum Circumscribed Ellipse
NB	metodo Narrow Band
PC	metodo Peak Counting
PH	metodo Prismatic Hull
PSD	Power Spectral Density (densità spettrale di potenza)
RC	metodo Range Counting
RFC	metodo Rainflow Counting
SED	metodo Strain Energy Density
TB	metodo di Tovo-Benasciutti
WL	metodo di Wirsching-Light
ZB	metodo di Zhao-Baker
α	angolo di fase tra la tensione/deformazione normale longitudinale (assiale), σ_x / ε_z , e la tensione/deformazione normale tangenziale (circonferenziale), σ_y / ε_t

α_m	m-esimo parametro larghezza di banda, con m numero reale positivo
β	angolo di fase tra la tensione/deformazione longitudinale (assiale), σ_x / ε_z , e la tensione/deformazione tangenziale, τ_{xy} / γ_{zt}
$\gamma_{zt}(t)$	deformazione tangenziale
δ	angolo compreso tra la normale \mathbf{w} al piano critico e la direzione media $\hat{1}$ della massima tensione/deformazione principale
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensore delle deformazioni relativo al punto materiale P
$\delta(\cdot)$	funzione delta di Dirac
$\varepsilon_{eq,a}$	ampiezza dilatazione equivalente relativa al piano critico
$\varepsilon_n, n = 1, 2, 3$	deformazioni principali, con $\varepsilon_1(t) \geq \varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_3(t)$
$\varepsilon_r(t)$	deformazione normale radiale
$\varepsilon_t(t)$	deformazione normale tangenziale (circonferenziale)
$\varepsilon_z(t)$	deformazione normale longitudinale (assiale)
$\boldsymbol{\eta}_C$	vettore spostamento tangenziale (agente sul piano critico)
$\eta_{C,a}$	ampiezza spostamento tangenziale
$\eta_{C,m}$	valore medio spostamento tangenziale
$\boldsymbol{\eta}_N$	vettore spostamento normale (agente sul piano critico)
$\eta_{N,a}$	ampiezza spostamento normale
$\eta_{N,m}$	valore medio spostamento normale
$\boldsymbol{\eta}_w$	vettore spostamento relativo al punto materiale P
κ	angolo di fase tra la deformazione normale longitudinale (assiale), ε_z , e la deformazione normale radiale, ε_r

λ	rapporto di biassialità
λ_m	m-esimo momento spettrale, con m numero reale positivo
μ_X	valore medio di $X(t)$
ν_a	numero di cicli nell'unità di tempo
ν_{eff}	coefficiente efficace di Poisson
$\nu_{eff,A}$	coefficiente efficace analitico di Poisson
$\nu_{eff,l}$	coefficiente efficace di Poisson di letteratura
$\nu_{eff,n}$	coefficiente efficace numerico di Poisson
ν_p	numero di massimi relativi nell'unità di tempo
ν_0	numero di attraversamenti dal valore medio nell'unità di tempo (con pendenza positiva)
σ	tensore degli sforzi relativo al punto materiale P
$\sigma_{a,eq}$	ampiezza tensione equivalente relativa al piano critico
$\sigma_{af,-1}$	limite a fatica per tensione normale alterna
$\sigma'_{af,-1}$	resistenza a fatica per tensione normale alterna a vita finita
$\sigma_n, n=1, 2, 3$	tensioni principali, con $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t) \geq \sigma_3(t)$
σ_u	resistenza ultima a trazione del materiale
$\sigma_x(t)$	tensione normale longitudinale (assiale)
$\sigma_y(t)$	tensione normale tangenziale (circonferenziale)
Σ	percorso descritto dalla tensione tangenziale sul piano critico
Σ'	poligonale a lati rettilinei e n vertici che schematizza il percorso Σ
$\tau_{af,-1}$	limite di fatica per tensione tangenziale alterna

$\tau'_{af,-1}$	resistenza a fatica per tensione tangenziale alterna a vita finita
$\tau_{xy}(t)$	tensione tangenziale
$\phi(\cdot)$	funzione di distribuzione normale standard
ϕ, θ, ψ	angoli principali di Eulero
$\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$	angoli principali di Eulero medi
ω_x	pulsazione della tensione sinusoidale normale σ_x
ω_y	pulsazione della tensione sinusoidale normale σ_y
ω_{xy}	pulsazione della tensione sinusoidale tangenziale τ_{xy}
ω_z	pulsazione della deformazione sinusoidale normale ε_z
ω_{zt}	pulsazione della deformazione sinusoidale tangenziale γ_{zt}
C	vettore tensione tangenziale (agente sul piano critico)
C_a	ampiezza tensione tangenziale
C_m	valore medio tensione tangenziale
E	modulo elastico
$E[D]$	valore atteso danno a fatica per unità di tempo
$E[D_{NB}]$	valore atteso danno a fatica per unità di tempo impiegando il metodo Narrow Band (NB) approximation
$E[D_{RC}]$	valore atteso danno a fatica per unità di tempo impiegando il metodo Range Counting (RC)
$E[D_{RFC}]$	valore atteso danno a fatica per unità di tempo impiegando il metodo Rainflow Counting (RFC)
E_{RMS}	errore scarto quadratico medio logaritmico
G	modulo elasticità tangenziale
$h(u,v)$	funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati
$H(u,v)$	probabilità cumulata dei cicli conteggiati

m	pendenza curva $S - N$ per tensione normale alterna
m^*	pendenza curva $S - N$ per tensione tangenziale alterna
N	vettore tensione normale (perpendicolare al piano critico)
N_a	ampiezza tensione normale
$N_{a,eq}$	ampiezza tensione normale equivalente
N_f	numero di cicli a rottura
N_m	valore medio tensione normale
$p_a(s)$	funzione densità di probabilità marginale dei cicli conteggiati
$p_{a,m}(s,m)$	funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati in funzione dell'ampiezza, s , e del valore medio, m
$p_p(X)$	funzione densità di probabilità dei massimi relativi di $X(t)$
$p_v(X)$	funzione densità di probabilità dei minimi relativi di $X(t)$
$P_p(X)$	probabilità cumulata dei massimi relativi di $X(t)$
$P_v(X)$	probabilità cumulata dei minimi relativi di $X(t)$
$PXYZ$	sistema di riferimento fisso (Capitolo 2 e 4)
$PX'Y'Z'$	sistema di riferimento ruotato
$Prtz$	sistema di riferimento fisso (Capitolo 3)
$Puvw$	sistema di riferimento locale relativo al piano critico
$P123$	sistema di riferimento con assi coincidenti con le direzioni principali di tensione/deformazione
r	distanza, misurata lungo la bisettrice dell'intaglio, tra la radice dell'intaglio e il punto critico
R_1	raggio del volume di controllo relativo alla condizione di carico di Modo I
R_3	raggio del volume di controllo relativo alla condizione di carico di Modo III

$\mathbf{s}_{xyz}(t)$	vettore delle tensioni nel sistema di riferimento $PXYZ$
$\mathbf{s}_{x'y'z'}(t)$	vettore delle tensioni nel sistema di riferimento $PX'Y'Z'$
$\mathbf{s}_{uvw}(t)$	vettore delle tensioni nel sistema di riferimento $Puvw$
$\mathbf{S}_{xyz}(\omega)$	matrice funzioni densità spettrale di potenza di $\mathbf{s}_{xyz}(t)$
$\mathbf{S}_{x'y'z'}(\omega)$	matrice funzioni densità spettrale di potenza di $\mathbf{s}_{x'y'z'}(t)$
$\mathbf{S}_{uvw}(\omega)$	matrice funzioni densità spettrale di potenza di $\mathbf{s}_{uvw}(t)$
\mathbf{S}_w	vettore tensione relativo al punto materiale P
S_{eq}	funzione densità spettrale di potenza equivalente
$S_{X,X}$	funzione densità spettrale di potenza di $X(t)$
$S_{3,3'}$	funzione densità spettrale di potenza della tensione normale $\sigma_{z'}$
$S_{6,6'}$	funzione densità spettrale di potenza della tensione tangenziale $\tau_{y'z'}$
$S_{3'',3''}$	funzione densità spettrale di potenza della tensione normale σ_w
$S_{6'',6''}$	funzione densità spettrale di potenza della tensione tangenziale τ_{vw}
t	tempo
T	periodo
T_{cal}	vita a fatica
T_{RMS}	errore quadratico medio
\mathbf{w}	vettore normale al piano critico
$W(t)$	funzione peso
$\mathbf{X}(t)$	processo stocastico, stazionario ed ergodico

Pedici

<i>a</i>	ampiezza
<i>A</i>	analitico
<i>C</i>	tangenziale
<i>cal</i>	numerico
<i>eff</i>	efficace
<i>exp</i>	sperimentale
<i>l</i>	letteratura
<i>m</i>	valore medio
max	valore massimo
<i>n</i>	numerico
<i>N</i>	normale

INDICE

SOMMARIO	i
ABSTRACT	v
LISTA DELLE PUBBLICAZIONI	vii
NOMENCLATURA	ix
1 FATICA MULTIASSIALE	1
1.1 Introduction	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Panorama storico	2
1.3 Meccanismi di danneggiamento a fatica	4
1.3.1 Struttura cristallografica dei metalli	5
1.3.2 Meccanismi di danneggiamento per frattura	7
1.3.2.1 <i>Frattura fragile</i>	7
1.3.2.2 <i>Frattura duttile</i>	10
1.3.3 Meccanismi di danneggiamento per fatica	14
1.4 Verifica a fatica: la scelta dell'approccio in funzione del meccanismo di danneggiamento	18
1.5 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate al piano critico	22
1.5.1 Componenti di tensione relative al piano critico	22
1.5.2 Componenti di spostamento relative al piano critico	27
1.6 Bibliografia	34

2 VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI CICLICI E ALTO NUMERO DI CICLI	43
2.1 Introduction	43
2.1 Introduzione	44
2.2 Il criterio nella sua formulazione originale	46
2.2.1 Direzioni medie principali di tensione	46
2.2.2 Determinazione della giacitura del piano critico	50
2.2.3 Componenti di tensione relative al piano critico	52
2.2.4 Valutazione della resistenza a fatica	56
2.3 L'effetto della scelta della giacitura del piano critico	58
2.3.1 Definizione della giacitura del piano critico	58
2.3.2 Validazione dell'implementazione proposta	61
2.4 L'effetto del metodo scelto per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale sul piano critico	71
2.4.1 Definizione dell'ampiezza della tensione tangenziale	71
2.4.2 Validazione dell'implementazione proposta	79
2.5 Bibliografia	90
3 VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI CICLICI E BASSO/MEDIO NUMERO DI CICLI	97
3.1 Introduction	97
3.1 Introduzione	99
3.2 Formulazione del criterio proposto nella presente Tesi	100
3.2.1 Direzioni medie principali di deformazione	102
3.2.2 Determinazione della giacitura del piano critico	103
3.2.3 Componenti di spostamento relative al piano critico	106
3.2.4 Valutazione della vita a fatica	108
3.3 L'effetto della scelta del coefficiente efficace di Poisson	109
3.3.1 Definizione del coefficiente efficace di Poisson	110
3.3.2 Validazione del criterio proposto	114
3.4 L'effetto della presenza di intagli	125
3.4.1 Formulazione per componenti strutturali intagliati	125
3.4.2 Validazione della formulazione proposta	130
3.5 Bibliografia	137

4 VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI RANDOM E ALTO NUMERO DI CICLI	143
4.1 Introduction	143
4.1 Introduzione	145
4.2 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate ai processi stocastici	147
4.2.1 Funzione di densità spettrale	147
4.2.2 Funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati e danno a fatica	151
4.3 Verifica a fatica in presenza di carichi monoassiali random: approccio spettrale	154
4.3.1 Metodo Narrow Band (NB) approximation e formula di Wirsching- Light (WL)	155
4.3.2 Modello di Dirlik (DK)	156
4.3.3 Modello di Zhao-Baker (ZB)	157
4.3.4 Modello di Tovo-Benasciutti (TB)	159
4.4 Il criterio nella sua formulazione originale	162
4.4.1 Determinazione della giacitura del piano critico	163
4.4.2 PSD della tensione normale equivalente relativa al piano critico	167
4.4.3 Valutazione della vita a fatica	169
4.5 L'effetto della scelta della giacitura del piano critico	169
4.5.1 Validazione dell'implementazione proposta	169
4.6 Bibliografia	176

*Ai miei genitori, Fabrizio e Patrizia,
alle mie sorelle, Eleonora e Martina,
e a Matteo*

1.1 Introduction

The aim of the present Ph.D. Thesis is to propose new criteria for multiaxial fatigue assessment of metallic structural components subjected to multiaxial either cyclic or random loadings, characterised by both high-cycle fatigue (HCF) and low/medium cycle fatigue (LCF) regimes. First of all, the phenomenon of multiaxial fatigue is needed to be introduced.

Components of machines, vehicles and structures are frequently subjected to variable loadings, and the resulting stresses/strains can lead to microscopic physical damage of the material involved. This damage can be accumulated with continued application of variable loadings until it develops into a macroscopic crack which leads to failure of the component at loading value below the material's ultimate strength.

This process of damage and failure due to variable loading is called fatigue (Dowling, 1999). In particular, metallic structural components are often exposed, during their service life, to variable loadings which produce either a uniaxial stress/strain state (when the stresses/strains lie on the same direction; uniaxial fatigue) or a multiaxial stress/strain state (characterised by two or more stress/strain tensor components different from zero; multiaxial fatigue).

1.1 Introduzione

La presente Tesi ha per oggetto lo sviluppo di nuovi criteri per la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali metallici, soggetti a carichi ciclici e random, in regime di alto e di basso/medio numero di cicli di carico. Prima di entrare nel

dettaglio degli argomenti oggetto della presente trattazione, occorre fare alcune premesse relativamente al fenomeno della fatica.

I componenti strutturali metallici di macchine, veicoli e strutture risultano frequentemente soggetti in esercizio a carichi ciclici, e gli stati tensionali/deformativi risultanti producono generalmente nel materiale delle microfessure. A causa dell'azione ripetuta dei carichi agenti, tali microfessure possono accrescersi, fino alla formazione di una fessura macroscopica, che porta alla rottura del componente strutturale, per valori dei carichi sollecitanti inferiori al limite di resistenza statica del materiale.

Tale fenomeno viene chiamato fatica (Dowling, 1999). In particolare, si parla di fatica monoassiale quando il componente strutturale metallico è soggetto a una sollecitazione ciclica uniassiale, vale a dire: le tensioni/deformazioni agiscono lungo la medesima direzione. Generalmente, però, lo stato tensionale/deformativo è multiassiale, ovvero il tensore degli sforzi/deformazioni ha diverse componenti non nulle variabili nel tempo: in tal caso si parla di fatica multiassiale.

1.2 Panorama storico

I primi studi sul fenomeno della fatica furono intrapresi per spiegare la rottura di componenti strutturali metallici che, alla luce delle teorie conosciute nel XIX secolo, sembravano inspiegabili.

Il primo lavoro scientifico dedicato allo studio della rottura per fatica fu quello di Albert (Albert, 1838) il quale, analizzando la rottura di catene per sollevamento impiegate nelle miniere di ferro, osservò che tale rottura era funzione sia del carico applicato e sia del numero di volte in cui veniva applicato il carico. Il termine fatica venne poi coniato nel 1839 da Poncelet (Poncelet, 1841).

Le prime ricerche sistematiche sui fenomeni di fatica furono quelle condotte da Wöhler intorno al 1850 (Wöhler, 1871). Wöhler, non riuscendo a spiegare il gran numero di rotture improvvise di assali di vagoni ferroviari (come quella disastrosa avvenuta a Versailles nel 1842), iniziò una lunga serie di studi che si protrassero per circa venti anni. L'ingegnere ferroviario tedesco non propose un modello teorico per spiegare i fenomeni di fatica, ma eseguì una serie di prove sperimentali su provini di acciaio soggetti a carichi ciclici monoassiali ad ampiezza costante. Wöhler riportò i risultati ottenuti da tali prove sotto forma di tabelle e solo qualche

anno dopo Spangenberg rappresentò tali risultati in diagrammi relativi alla vita a fatica dell'elemento, espressa in termini di cicli di carico sopportabili dal materiale per un dato valore dell'ampiezza del ciclo di carico applicato (Spangenberg, 1876). Sulla base delle evidenze sperimentali ottenute, Wöhler riuscì ad individuare il cosiddetto limite di fatica del materiale, cioè quel valore dell'ampiezza del ciclo di carico al di sotto del quale non avviene la rottura, neppure per un numero teoricamente infinito di cicli di carico. Per molto tempo i risultati di Wöhler rimasero gli unici a fornire un criterio per la progettazione di componenti strutturali soggetti a carichi ciclici.

Successivamente gli studi dei ricercatori furono indirizzati ai carichi variabili nel tempo in modo irregolare (carichi ad ampiezza variabile); a tal proposito, nel 1945 Miner propose la legge del danneggiamento cumulativo, implementando un approccio sviluppato venti anni prima da Palmgren (Miner, 1945).

Nel 1954, Coffin e Manson proposero, per regimi caratterizzati da basso/medio numero di cicli di carico, una caratterizzazione della vita a fatica del materiale metallico basata sull'ampiezza della deformazione plastica (Coffin, 1954; Manson, 1965).

Una svolta fondamentale nello studio dei fenomeni di fatica si ebbe attorno al 1960, quando per studiare tali fenomeni si pensò di applicare la Meccanica della Frattura, disciplina che studia il comportamento degli elementi fessurati. Utilizzando i concetti propri della Meccanica della Frattura furono proposte leggi che governano la propagazione di fessure in elementi soggetti a carichi ciclici ad ampiezza costante. La legge di Paris-Erdogan (Paris, 1963), che fu una delle prime ad essere state formulate, rappresenta ancora oggi un utile strumento per prevedere la propagazione di fessure per fatica (Carpinteri, 2013).

Fra gli anni '70 e '90, grazie soprattutto all'interesse dimostrato dall'industria nucleare e aerospaziale, si registrò un notevole incremento nell'attività di ricerca sperimentale rivolta alla progettazione a fatica. Tale livello di conoscenza condusse, quindi, al superamento di alcune delle trattazioni precedenti e alla necessità di studiare nuovi aspetti del problema, precedentemente trascurati o semplificati.

Ancora oggi la progettazione a fatica di componenti strutturali metallici costituisce un tema di interesse per i ricercatori. Infatti, la rottura per fatica

rappresenta la causa più frequente di rottura di componenti meccanici in diversi settori industriali (per oltre il 90%), e questo comporta non solo danni economici, ma anche problematiche relative alla sicurezza, poiché la rottura per fatica si manifesta frequentemente in modo improvviso.

Il problema della progettazione a fatica multiassiale viene oggi affrontato secondo approcci concettualmente molto diversi tra loro, e non esiste un approccio universalmente accettato dalla comunità scientifica (Socie, 1999; Carpinteri, 2003; Susmel, 2009a).

Essendo la ricerca nel campo della fatica multiassiale piuttosto aperta, nella presente Tesi vengono sviluppati e validati nuovi criteri per la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali metallici, con l'obiettivo di proporre un utile strumento di progettazione a fatica.

La difficoltà maggiore che si incontra nella formulazione di un nuovo criterio di fatica multiassiale, è sicuramente scegliere correttamente i parametri su cui esso si fonda, cioè determinare quali sono le quantità tensionali e/o deformative che governano la realtà fisica del problema. Al fine di determinare tali parametri, nel presente Capitolo vengono introdotti i concetti di base relativamente ai meccanismi di danneggiamento a fatica (nucleazione e propagazione della fessura fino alla frattura finale). In funzione del meccanismo di danneggiamento di cui sopra, vengono poi presentati i diversi approcci disponibili in letteratura per la verifica a fatica di componenti strutturali metallici.

Particolare attenzione è posta all'approccio del piano critico, poiché i criteri basati su tale approccio sono caratterizzati da una elevata efficienza e risultano particolarmente versatili (Marquis, 2003; Lopez-Crespo, 2015). Tale approccio si basa sull'evidenza sperimentale che esiste un piano di danneggiamento dominante del materiale, detto appunto piano critico.

Infine, vengono definite le grandezze ingegneristiche, in termini di tensioni e di deformazioni, correlate al piano critico.

1.3 Meccanismi di danneggiamento a fatica

L'American Society for Testing and Materials (ASTM E1823 – 13, 2013) definisce con il termine fatica *“il processo di cambiamento progressivo e localizzato della microstruttura del materiale soggetto a condizioni di carico che producono*

tensioni e deformazioni cicliche e che si conclude con la presenza di fessure o la frattura completa dopo un numero sufficiente di cicli”.

Più precisamente, occorre porre particolare attenzione al significato di quattro termini impiegati in tale definizione (Fuchs, 1980):

(i) il termine “progressivo”: indica che il fenomeno della fatica si verifica in un dato periodo di tempo o di utilizzo (la rottura per fatica avviene in modo improvviso, ma i meccanismi coinvolti potrebbero essere presenti fin dall’inizio dell’utilizzo dei componenti);

(ii) il termine “localizzato”: indica che il processo di fatica è presente solo in corrispondenza di certe aree (tali aree possono presentare: valori elevati di tensione/deformazione dovuti alle sollecitazioni cicliche applicate, modifiche repentine nella geometria del componente e imperfezioni del materiale);

(iii) il termine “fessura”: indica la causa della rottura a fatica. In particolare, la causa ultima di tutte le rotture a fatica è rappresentata dalla crescita di una fessura a seguito dell’applicazione di sollecitazioni cicliche, fino a quando il materiale rimanente non è più in grado di sopportare le tensioni/deformazioni presenti, e quindi si verifica una rottura improvvisa.

(iv) il termine “frattura”: indica la parte finale del processo di fatica, caratterizzato dalla separazione del componente strutturale in due o più parti.

I Paragrafi a seguire sono dedicati alla descrizione del fenomeno di danneggiamento per fatica. A premessa di tale danneggiamento, vengono presentati i meccanismi di danneggiamento per frattura.

Prima di entrare nei dettagli dei contenuti, è necessario introdurre alcuni concetti base sulla struttura cristallografica dei metalli.

1.3.1 Struttura cristallografica dei metalli

I metalli sono reticoli cristallini, che generalmente includono elementi chimici primari e, in misura minore, particelle di seconda fase (leghe).

Il reticolo definisce l’organizzazione degli atomi primari. Per i metalli strutturali il reticolo può essere cubico a facce centrate (FCC), cubico a corpo centrato (BCC) o esagonale a pacchetto chiuso (HCP).

Durante il processo di solidificazione i numerosi atomi vanno a formare dei grani. In base alle condizioni termiche di solidificazione e al tipo di leghe, questi

grani possono crescere con dimensioni e organizzazione interna pressoché uniformi, anche se generalmente l'orientazione relativa dei grani è casuale. Poiché le variazioni di orientazione dei grani sono praticamente infinite (metalli policristallini), le proprietà meccaniche del reticolo cristallino risultano isotrope a livello macroscopico.

La resistenza del reticolo cristallino, rappresentata dalle forze di attrazione e repulsione fra gli atomi, varia con l'orientamento dei grani nel reticolo, poiché ogni grano presenta proprietà anisotrope a livello microscopico.

Il processo di crescita del reticolo cristallino è spesso caratterizzato da difetti. Questi difetti possono essere difetti di punto, di linea, di superficie o di volume. In particolare, i difetti di punto comprendono vacanze, atomi interstiziali e atomi mancanti; i difetti di linea sono associati alle dislocazioni; i difetti di superficie comprendono ad esempio grani di bordo; i difetti di volume sono simili ai difetti di punto, ma hanno dimensioni maggiori. Il numero e la collocazione di questi difetti, tra i grani del metallo, influenzano la resistenza e la deformazione del metallo stesso.

Tra i numerosi difetti che si possono trovare all'interno dei reticoli cristallini dei metalli strutturali, quello della dislocazione ha ricevuto particolare attenzione. È stato infatti evidenziato che i carichi esterni sono in grado di produrre un movimento delle dislocazioni, che porta la dislocazione ad interferire con altre dislocazioni e a moltiplicarsi all'interno del reticolo (Suresh, (1998)). Il moto delle dislocazioni provoca cambiamenti della struttura a livello microscopico (che prendono il nome di microplasticità) che provocano la crisi del metallo.

Si consideri un generico reticolo cristallino (*Fig. 1.1*). Durante la solidificazione, all'interno del reticolo si può creare, ad esempio, un semipiano supplementare di atomi, così che si arriva ad avere la presenza di una dislocazione alla base di tale semipiano.

Quando viene applicato uno sforzo di taglio (*Fig. 1.1(a)*), il reticolo sotto il semipiano si sposta dalla sua posizione originale e conseguentemente il reticolo si deforma (*Fig. 1.1(b)-(c)*). Se l'applicazione dello sforzo di taglio persiste, la dislocazione continua a muoversi, finché non viene raggiunta la superficie (*Fig. 1.1(d)*).

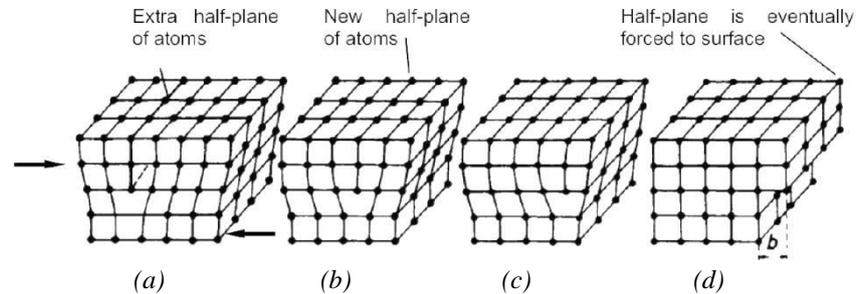


Figura 1.1 Scorrimento della dislocazione sotto l'azione di uno sforzo di taglio.

Se il carico applicato agisce perpendicolarmente alla dislocazione (cioè parallelamente al semipiano) il reticolo non si deformerebbe e la dislocazione rimarrebbe nella sua posizione originaria. Questo porta alla conclusione che, orientazioni critiche del reticolo rispetto alla direzione del carico applicato, favoriscono o meno lo scorrimento della dislocazione.

Lo sforzo minimo necessario per provocare lo scorrimento della dislocazione è detto sforzo di taglio critico ed è tipicamente inferiore di uno o due ordini di grandezza rispetto alla tensione di snervamento. Questo indica che lo scorrimento della dislocazione avviene per carichi che non producono danni fisici visibili ad occhio nudo.

1.3.2 Meccanismi di danneggiamento per frattura

Il termine tenacità viene impiegato per descrivere la capacità di un materiale a deformarsi plasticamente ed assorbire energia prima e durante la rottura. Gli aggettivi fragile e duttile sono, quindi, utilizzati per distinguere le fratture caratterizzate da bassa e alta tenacità, rispettivamente.

1.3.2.1 Frattura fragile

La frattura fragile è generalmente caratterizzata dalla presenza di modeste deformazioni plastiche.

In particolare, la frattura fragile dei metalli si può verificare per separazione diretta lungo i piani cristallografici a causa di una semplice rottura dei legami atomici. Tale tipologia di frattura è definita transgranulare o clivaggio. La caratteristica più importante del clivaggio è che è generalmente associato ad un

particolare piano cristallografico (anche chiamato piano di clivaggio). In particolare, poiché i grani adiacenti presentano orientazioni leggermente differenti tra loro, la fessura cambia la propria direzione di propagazione in corrispondenza dei bordi dei grani, al fine di continuare a seguire il piano cristallografico preferenziale (Broek, 1982) (*Fig. 1.2*).

Le piccole superfici brillanti e riflettenti che si vedono sulla superficie di frattura rappresentano i piani di clivaggio dei vari grani (*Fig. 1.3*).

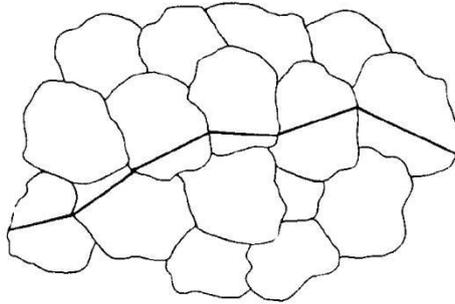


Figura 1.2 Propagazione della fessura fragile tra i grani del reticolo cristallino del metallo (frattura transgranulare).

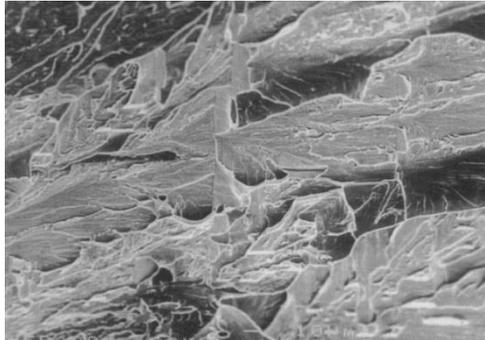


Figura 1.3 Superfici di clivaggio in presenza di frattura fragile transgranulare.

Osservando al microscopio elettronico la superficie di una frattura transgranulare si notano piccole irregolarità, che si manifestano sotto forma di gradini (*Fig. 1.4(a)*). In particolare, all'interno di un grano la fessura può propagare simultaneamente lungo due piani cristallografici paralleli;

successivamente, le due fessure parallele si uniscono lungo un piano di clivaggio secondario formando un gradino. Inoltre, anche al bordo dei grani, dove il fronte della fessura passa da un grano a un altro, caratterizzato da differente orientazione, si possono formare dei gradini. L'unione di tali gradini determina, poi, la formazione di linee di lacerazione di tipo "fluviale" (in inglese note come river pattern), che caratterizzano la superficie di frattura transgranulare (Fig. 1.4(b)).

Inoltre, la frattura transgranulare si può presentare con una morfologia a "lingua" (tongue), a "piuma" (feather marking) e a "zig zag" (chevron) (Fig. 1.5)

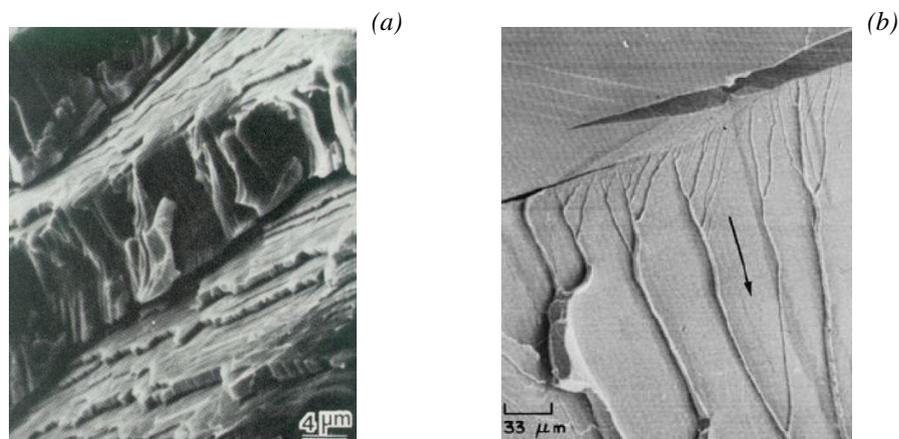


Figura 1.4 Morfologia di una superficie di frattura transgranulare: gradini di clivaggio per una lega di rame (a); linee di lacerazione di tipo "fluviale" per un acciaio (b).

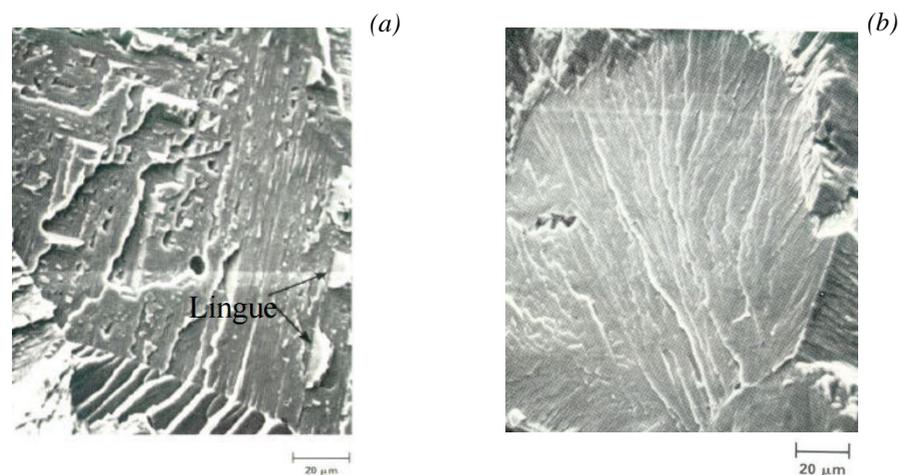


Figura 1.5 Morfologia di una superficie di frattura transgranulare: a "lingua" (a) e a "piuma" (b) per un acciaio al cromo.

La frattura fragile può essere anche di tipo intergranulare; tale frattura è caratterizzata dalla separazione diretta lungo i bordi dei grani a causa di una semplice rottura dei legami atomici. La superficie di frattura appare anche in questo caso brillante essendo visibili i bordi dei grani che si sono separati, ma mancano i piani di clivaggio (in *Fig. 1.6* è possibile osservare la struttura tridimensionale dei grani).

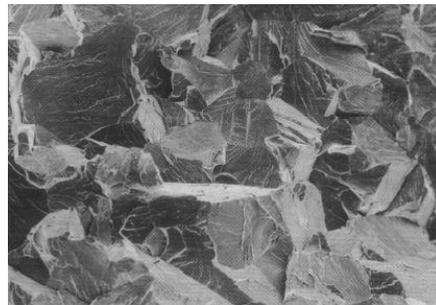


Figura 1.6 Superfici di frattura dei grani in presenza di frattura fragile intergranulare.

Negli ultimi decenni sono stati sviluppati differenti modelli per descrivere la frattura fragile (Gao, 2001; Knott, 2006; Wallin, 2006) e un'interessante discussione è riportata in (Qian, 2014). Recentemente Rodríguez-Martín e collaboratori hanno proposto un modello di frattura fragile nei materiali cristallini in presenza di temperature molto basse, poiché in queste condizioni aumenta la probabilità di incontrare tale tipologia di frattura (Rodríguez-Martín, 2007).

1.3.2.2 Frattura duttile

La frattura che si verifica in presenza di rilevanti deformazioni plastiche è definita frattura di tipo duttile. Più precisamente, tale frattura avviene ad opera di scorrimenti lungo le dislocazioni.

In presenza di prove di trazione, la frattura duttile si traduce sempre in una strizione, ossia una riduzione localizzata della sezione resistente del materiale che produce la tipica frattura a coppa e a cono (*Fig. 1.7*).

Nella matrice cristallina dei materiali metallici sono sempre presenti delle particelle di seconda fase che determinano deformazioni del reticolo cristallino stesso. In particolare, è possibile distinguere tre differenti tipologie di particelle:

(i) particelle grandi, visibili al microscopio ottico, e di dimensione compresa tra 1-20 μm . Generalmente, tali particelle consistono in una combinazione dei vari elementi presenti nella lega, che vengono aggiunti per migliorare la colabilità del metallo o altre proprietà. È stato osservato sperimentalmente che tali particelle non influenzano la resistenza del materiale (Broek, 1982);

(ii) particelle intermedie, visibili solamente al microscopio elettronico, di dimensione compresa tra 500-5000 Ångström. Generalmente, anche tali particelle consistono in una combinazione dei vari elementi presenti nella lega. È stato osservato che tali elementi, aggiunti intenzionalmente, sono essenziali per le proprietà meccaniche del materiale (Broek, 1982);

(iii) precipitati, visibili in certi casi al microscopio elettronico, di dimensione compresa tra 50-500 Ångström. Tali particelle sono volutamente sviluppate nei metalli mediante trattamento termico e invecchiamento, al fine di conferire al metallo la tensione di snervamento richiesta.



Figura 1.7 Morfologia frattura duttile: frattura a coppa e a cono.

Le particelle di grandi dimensioni sono estremamente fragili e quindi non sono in grado di sopportare le deformazioni plastiche della matrice circostante. In particolare, quando la matrice cristallina inizia a deformarsi plasticamente, le particelle di grandi dimensioni si rompono immediatamente. In questo modo si generano dei vuoti all'interno del reticolo cristallino del metallo. È stato osservato sperimentalmente che le particelle di grandi dimensioni determinano l'istante e la posizione in cui si verifica la frattura, ma non intervengono nel processo di frattura stesso poiché la frattura duttile è indotta dalle particelle intermedie. In particolare,

in presenza di elevate deformazioni plastiche, le particelle intermedie, non essendo in grado di deformarsi come la matrice, perdono aderenza con la matrice stessa. Conseguentemente, si formano dei vuoti di piccole dimensioni, in corrispondenza dei quali si hanno delle concentrazioni tensionali e quindi un aumento della deformazione plastica localizzata. I micro-vuoti così formati crescono, unendosi tra loro, ad opera degli scorrimenti che interessano le dislocazioni, formando una superficie continua, fino a determinare la strizione del metallo (*Fig. 1.8*).

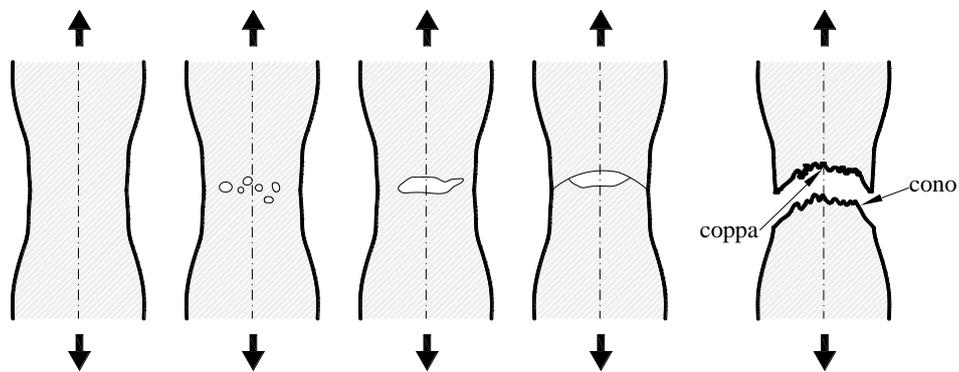


Figura 1.8 Formazione di una frattura duttile per crescita e coalescenza dei micro-vuoti.

Dall'osservazione della superficie di frattura al microscopio elettronico si nota che è costituita da piccole depressioni a forma di coppetta (in inglese note come dimples) (*Fig. 1.9*). La dimensione dei dimples è inversamente proporzionale al numero di micro-vuoti iniziali. In particolare, se i micro-vuoti sono pochi e distanziati tra loro, i dimples sono di grande dimensione; al contrario se i micro-vuoti iniziali sono numerosi, i dimples assumono dimensioni ridotte.

La forma dei dimples dipende dallo stato di sollecitazione presente nel materiale. In particolare, i dimples sono equiassici (caratterizzati dalle medesime dimensioni in tutte le direzioni del reticolo cristallino) e ben contornati nel caso di sollecitazione di trazione (*Fig. 1.10(a)*), mentre sono allungati e con una estremità non chiusa nel caso di sollecitazione di taglio (*Fig. 1.10(b)*).

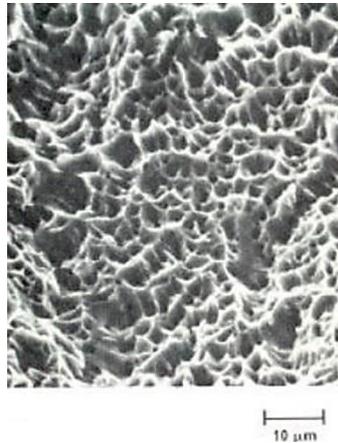


Figura 1.9 Superficie di frattura duttile caratterizzata dai dimples.

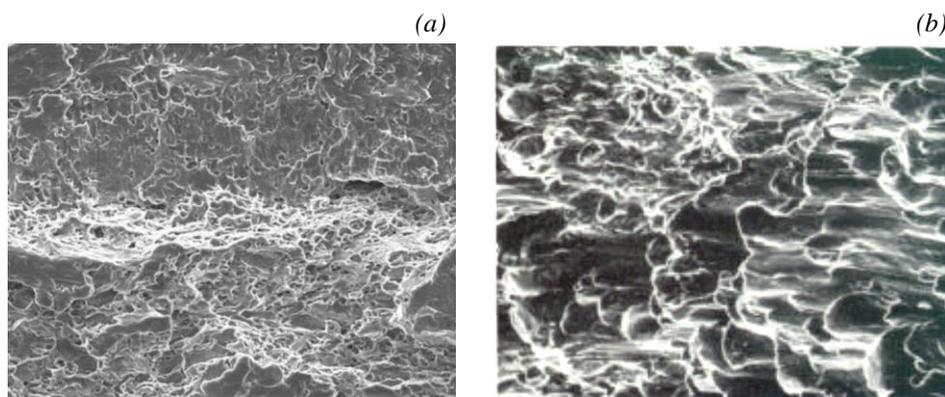


Figura 1.10 Morfologia di una superficie di frattura duttile: dimples equiassici per una lega di alluminio (a); dimples allungati per una lega di titanio (b).

La frattura di tipo duttile può essere simulata numericamente impiegando sia modelli disaccoppiati che modelli accoppiati disponibili in letteratura (Kiran, 2014). I modelli disaccoppiati assumono che la componente del danno associata alle fasi di nucleazione e crescita dei micro-vuoti non caratterizzi il legame costitutivo del materiale (Taktak, 2009). Al contrario, i modelli accoppiati sono in grado di simulare il danno causato dalla nucleazione, crescita e coalescenza dei micro-vuoti durante il processo di frattura duttile (Kiran, 2014; Xu, 2014).

1.3.3 Meccanismi di danneggiamento per fatica

La crisi di frattura per fatica ha inizio con la nucleazione di una o più fessure, come risultato di deformazioni plastiche cicliche che si verificano alla scala microscopica (Broek, 1982). Sebbene le tensioni presenti siano al di sotto del limite di snervamento del materiale, localmente il valore della tensione può superare tale limite in corrispondenza di intagli e discontinuità, quali i bordi di grano, le dislocazioni e la rugosità superficiale. Conseguentemente, si ha la presenza di deformazioni plastiche a livello locale.

In letteratura sono presenti differenti modelli per spiegare il fenomeno di nucleazione delle fessure (Wood, 1958). In particolare, l'applicazione ripetuta di carichi variabili nel tempo determina nei grani superficiali uno scorrimento del reticolo lungo le dislocazioni.

Osservando attraverso un microscopio ad alta risoluzione le superfici di alcuni grani si evidenziano linee scure e parallele, dette bande di scorrimento, cioè delle irregolarità della superficie, provocate da scorrimenti del reticolo lungo le dislocazioni. Queste irregolarità microscopiche sono piani slittati gli uni rispetto agli altri che danno origine a sporgenze e rientranze nella superficie del metallo (Fig. 1.11). In particolare, l'analisi al microscopio elettronico rivela la presenza sulla superficie del metallo di estrusioni e intrusioni conseguenti all'applicazione dei carichi ciclici, in corrispondenza delle quali si hanno concentrazioni di tensione e, quindi, deformazioni plastiche. Tali condizioni favoriscono l'innescarsi della fessura.

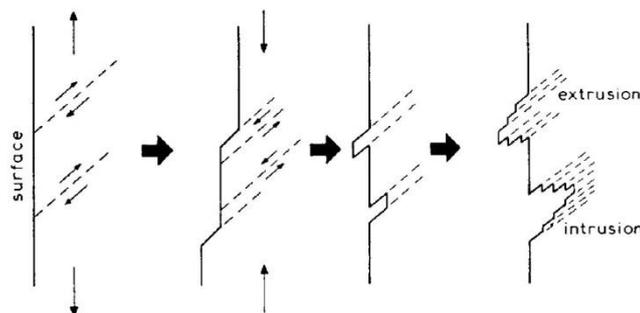


Figura 1.11 Nucleazione della fessura per fatica (Broek, 1982).

Come già introdotto, generalmente la superficie del materiale è la zona più favorevole alla nucleazione di fessure e questo si verifica per una serie di cause, vale a dire:

- (i) la presenza di intagli superficiali caratterizzati da significativi gradienti tensionali;
- (ii) le condizioni di carico che producono i massimi valori tensionali in corrispondenza della superficie;
- (iii) la geometria della superficie che non è mai perfettamente liscia, ma che presenta sempre piccoli concentratori tensionali;
- (iv) le bande di scorrimento preesistenti che agiscono come concentratori tensionali;
- (v) la presenza di particelle di seconda fase e di inclusioni, considerati concentratori tensionali microscopici.

Il meccanismo di propagazione della fessura per fatica è funzione del regime di carico agente, vale a dire: se la tensione massima agente è inferiore alla tensione di snervamento del materiale, la propagazione della fessura avviene con un meccanismo del tutto analogo a quello di frattura per clivaggio (presentato al Paragrafo 1.3.2.1); se la tensione massima è invece superiore alla tensione di snervamento, la propagazione della fessura per fatica avviene ad opera di un meccanismo ripetitivo di affilamento e arrotondamento dell'apice, come riportato in *Figura 1.12*. In particolare, a seguito dell'applicazione di una sollecitazione ciclica di trazione, in corrispondenza dell'apice di una fessura di lunghezza a si ha la formazione di una banda di scorrimento nella direzione della massima tensione tangenziale (stage 1, *Fig. 1.12*). A causa di tale scorrimento, la fessura si apre e si estende in lunghezza (stage 2, *Fig. 1.12*); successivamente si può formare un'altra banda di scorrimento come quella riportata nello stage 3 di *Figura 1.12*. Con l'aumentare delle tensioni, si generano altre bande di scorrimento parallele tra loro, che conducono a una fessura smussata (stage 4, *Fig. 1.12*). Durante la fase crescente del ciclo di carico, la fessura raggiunge una lunghezza pari a $a + \Delta a$.

Nella fase decrescente del ciclo di carico, le tensioni di compressione che si generano portano alla chiusura delle facce della fessura; la superficie di fessura

appena creata viene, quindi, schiacciata e in tal modo la fessura torna ad essere acuta (stage 5, *Fig. 1.12*).

Ad ogni ciclo di sollecitazione, il meccanismo di apertura e chiusura della fessura (stages 1-5 e 6-7, *Fig. 1.12*) comporta la formazione di una increspatura (definita in inglese con il termine ripple); l'analisi al microscopio elettronico rivela la presenza di tali increspature, dette striature, sulla superficie di frattura (*Fig. 1.13*).

Le striature rappresentano le posizioni successive del fronte della fessura durante la fase di propagazione della fessura stessa. In particolare, analizzando la superficie di frattura mediante il microscopio elettronico è possibile calcolare la velocità di propagazione della fessura per ciclo di carico in funzione della distanza tra le striature.

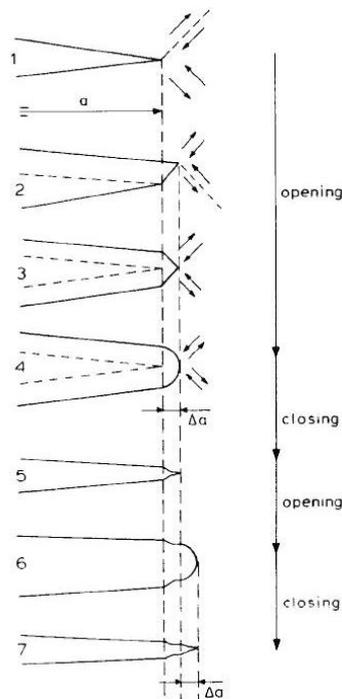


Figura 1.12 Propagazione di una fessura per fatica (Broek, 1982).

La formazione di striature regolari (come quelle riportate in *Fig. 1.13*) richiede la disponibilità di molte bande di scorrimento al fine di accogliere il fronte della

fessura e di facilitare la propagazione del fronte attraverso i grani adiacenti. Al contrario, in presenza di un numero ridotto di bande di scorrimento, le striature sono poco sviluppate e si possono osservare solo in qualche grano isolato.

Con il proseguire della sollecitazione ciclica, le fessure tendono ad unirsi e crescere secondo un piano normale alla direzione della massima tensione principale. Quando le dimensioni della fessura diventano critiche, la propagazione diventa instabile e si ha la rottura. Infatti, l'accrescimento della fessura porta ad una diminuzione progressiva della sezione resistente: quando questa diventa così ridotta da non essere più in grado di resistere alle sollecitazioni esterne, il materiale si rompe ad una velocità molto elevata, producendo generalmente fratture imprevedibili.

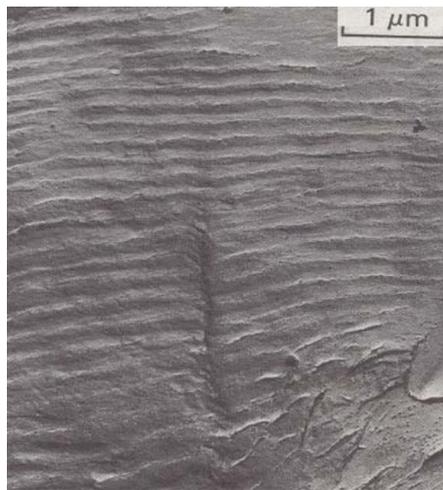


Figura 1.13 Striature visibili sulla superficie di frattura mediante un microscopio elettronico.

Infine, è importante sottolineare che in funzione della natura del materiale, una delle due fasi del meccanismo di danneggiamento per fatica (cioè o la fase di nucleazione o quella di propagazione della fessura) è predominante rispetto all'altra.

1.4 Verifica a fatica: la scelta dell'approccio in funzione del meccanismo di danneggiamento

In funzione dei meccanismi di danneggiamento discussi ai Paragrafi 1.3.2 e 1.3.3, è possibile individuare differenti approcci disponibili in letteratura per la valutazione della resistenza/vita a fatica di componenti strutturali metallici.

A tale scopo, l'analogia tra la fatica per alto numero di cicli e la propagazione della fessura ad opera della rottura dei legami atomici (analogia alla frattura per clivaggio - frattura fragile), e quella tra la fatica per basso/medio numero di cicli e la propagazione della fessura ad opera del meccanismo ripetitivo di affilamento e arrotondamento dell'apice, è stata presa in considerazione in molti dei criteri disponibili in letteratura (Taylor, 2007). In particolare, in presenza di carichi multiassiali ciclici tali criteri propongono di ridurre lo stato tensionale/deformativo multiassiale ad una condizione monoassiale equivalente (Filippini, 2003). Tali criteri sono basati sulle tensioni in presenza di regimi ad alto numero di cicli, essendo la propagazione controllata dalle tensioni agenti, mentre sono formulati in termini di deformazioni per fatica a basso/medio numero di cicli, essendo, in quest'ultimo caso, la propagazione controllata dalle deformazioni.

Tali criteri possono essere classificati in criteri basati sugli invarianti di tensione/deformazione, su medie spaziali di tensione/deformazione, sull'energia e sull'approccio del piano critico, anche se storicamente i primi criteri di fatica multiassiale erano estensioni dei classici criteri per carichi multiassiali statici (Filippini, 2003).

In regime di fatica multiassiale ad alto numero di cicli, tali estensioni sono rappresentate dal criterio: della massima tensione principale, della massima tensione tangenziale e della massima tensione tangenziale ottaedrale; per fatica a basso/medio numero di cicli, le estensioni di cui sopra sono invece rappresentate dal criterio: della massima deformazione principale, della massima deformazione tangenziale e della massima deformazione tangenziale ottaedrale. Successivamente, la verifica a fatica multiassiale viene condotta impiegando l'ampiezza di una tensione/deformazione equivalente (ricavata dai criteri di cui sopra) unitamente a una curva di fatica del materiale, vale a dire: o la curva di Wöhler (in regime di alto numero di cicli) o la curva di Manson-Coffin (in regime di basso/medio numero di cicli).

Lo svantaggio dei criteri di cui sopra è quello di poter essere applicati solamente in presenza di carichi proporzionali, cioè quando le direzioni principali di tensione/deformazione sono fisse durante il ciclo di carico. In particolare, tali criteri, a parità di ampiezza delle tensioni/deformazioni applicate, forniscono lo stesso valore di tensione/deformazione equivalente sia per carichi proporzionali sia per carichi non proporzionali. Tuttavia, è stato osservato sperimentalmente che la resistenza/vita a fatica è nettamente inferiore in presenza di carichi non proporzionali rispetto al caso di carichi proporzionali, a causa di un ulteriore incrudimento ciclico non osservato nel caso di carichi proporzionali (Socie, 1999). Diversi studi disponibili in letteratura attribuiscono tale incrudimento al movimento degli atomi, che sono attivati in misura maggiore in presenza di carichi non proporzionali a causa della rotazione delle direzioni principali di tensione/deformazione (Sakane, 1999).

Al fine di considerare il caso di carichi non proporzionali, in letteratura risultano disponibili versioni modificate dei criteri di cui sopra, quali ad esempio i criteri di Lee (Lee, 1980) e di Sakane e collaboratori (Sakane, 1999) per fatica ad alto e basso/medio numero di cicli, rispettivamente.

Per quanto riguarda i criteri basati sugli invarianti di tensione/deformazione, i parametri fondamentali che definiscono tali criteri sono essenzialmente due: la tensione idrostatica e la componente deviatorica del tensore degli sforzi/deformazioni.

In regime di alto numero di cicli, tali criteri sono generalmente formulati impiegando una combinazione delle componenti del tensore deviatorico degli sforzi e della tensione idrostatica come parametro per valutare la resistenza a fatica dei componenti strutturali metallici (Crossland, 1956; Deperrois, 1991; Li, 2000; Cristofori, 2009; Vu, 2010; Capetta 2011).

Per fatica a basso/medio numero di cicli, Mamiya e collaboratori (Mamiya, 2014a; Mamiya, 2014b) hanno recentemente proposto di determinare la vita a fatica di componenti strutturali metallici mediante una combinazione delle componenti del tensore deviatorico delle deformazioni, della tensione idrostatica e del secondo invariante della componente deviatorica del tensore degli sforzi.

I criteri basati su medie spaziali di tensione/deformazione presentano, invece, la caratteristica di utilizzare, come parametri essenziali per la loro definizione,

medie delle componenti tensionali/deformative di piano su un volume V . Più precisamente, tali medie vengono calcolate attraverso un integrale doppio, le cui variabili di integrazione sono rappresentate da due angoli che descrivono il versore normale ad un generico piano materiale all'interno di V . Al fine di considerare tutte le possibili orientazioni di tale piano, l'operazione di integrazione deve essere effettuata su opportuni intervalli degli angoli di cui sopra.

In presenza di alto numero di cicli, Papadopoulos (Papadopoulos, 1997) ha proposto un criterio basato sulla determinazione di un valore medio delle deformazioni plastiche accumulate dai grani cristallini presenti in un certo volume V , ottenuto a partire dal valore medio delle tensioni tangenziali relative al generico piano.

Per fatica a basso/medio numero di cicli, i criteri disponibili in letteratura definiscono l'ampiezza di una deformazione tangenziale equivalente considerando il valore medio delle componenti di deformazione tangenziale relative al generico piano (Sonsino, 1989; Filippini, 2003).

I criteri energetici si fondano sull'ipotesi che la densità di energia rappresenti un parametro significativo per la verifica a fatica di componenti strutturali metallici. L'utilizzo di tale grandezza presenta un vantaggio fondamentale rispetto ai criteri discussi in precedenza: la quantità di energia richiesta per il verificarsi della rottura per fatica è indipendente dalla complessità dello stato tensionale/deformativo presente nel componente, e pertanto è teoricamente sufficiente un solo parametro per eseguire la verifica a fatica, anche in presenza di sollecitazioni complesse (Susmel, 2003).

Il primo ricercatore ad utilizzare un criterio basato sull'energia fu Jasper (Jasper, 1923), il quale analizzò la resistenza a fatica di provini metallici ferrosi soggetti a carichi di trazione-compressione. Successivamente, Garud (Garud, 1981), estendendo l'applicabilità dei criteri energetici anche al caso di carichi multiassiali, propose di eseguire la verifica a fatica multiassiale impiegando l'energia associata alla sola componente di deformazione plastica.

Da segnalare è sicuramente il criterio sviluppato da Ellyin (Ellyin, 1989; Ellyin, 1997), il quale propose per primo un approccio per la verifica a fatica multiassiale basato sulla combinazione della densità di energia di deformazione (Strain Energy Density (SED)) elastica e plastica.

Negli ultimi decenni sono stati proposti in letteratura differenti criteri basati sulla densità di energia di deformazione, come i criteri di Park e collaboratori (Park, 2000) e di Lazzarin e collaboratori (Lazzarin, 2001; Berto, 2015). Tali criteri, essendo formulati in termini energetici, presentano il grande vantaggio di poter essere applicati sia in regime per alto sia per basso/medio numero di cicli di carico.

I criteri basati sull'approccio del piano critico sono stati formulati sulla base dell'osservazione sperimentale del fenomeno di nucleazione e crescita delle fessure per fatica (Marquis, 2003). Secondo tali criteri, la verifica a fatica multiassiale di componenti strutturali metallici viene eseguita su uno specifico piano materiale (il cosiddetto piano critico).

I criteri basati sull'approccio del piano critico sono formulati in termini di tensioni in regime di alto numero di cicli (Findley, 1959; Mataka, 1977; McDiarmid, 1987; McDiarmid, 1991; Susmel, 2002; Karolczuk, 2006; Carpinteri, 2011; Łagoda, 2014), mentre sono formulati in termini di deformazioni per basso/medio numero di cicli (Brown, 1973; Wang, 1973; Socie, 1987; Fatemi, 1988; Chen, 1996; Susmel, 2009b; Carpinteri, 2015; Walat, 2015). È importante sottolineare che alcuni dei criteri per basso/medio numero di cicli sono delle riformulazioni in termini di deformazioni di criteri originariamente formulati per alto numero di cicli.

L'aspetto comune di tutti i criteri basati sull'approccio del piano critico è che la stima della resistenza/vita a fatica è effettuata impiegando una combinazione delle tensioni/deformazioni relative al piano critico.

Tali criteri si distinguono per la strategia impiegata per determinare la giacitura del piano critico. Più precisamente, molti ricercatori definiscono il piano critico come il piano materiale dove alcune componenti di tensione/deformazione (o una loro combinazione) raggiungono il massimo valore (Łagoda, 2005; Susmel, 2013; Anes, 2014; Li J., 2014; Susmel, 2014; Kluger, 2015; Wang, 2015a). Alternativamente, la giacitura del piano critico può essere correlata alla direzioni principali di tensione/deformazione, impiegando opportune funzioni peso, che tengono conto dei principali fattori che influenzano il comportamento a fatica dei materiali metallici (Macha, 1989; Carpinteri, 2000; Carpinteri 2002).

Tra i diversi criteri per la verifica a fatica multiassiale che sono stati discussi finora, è stato dimostrato (Marquis, 2003; Susmel, 2010; Lopez-Crespo, 2015) che i criteri basati sull'approccio del piano critico sono caratterizzati da una elevata efficienza.

Inoltre, tali criteri si sono rivelati particolarmente versatili e trovano impiego in una vasta gamma di applicazioni, come: componenti strutturali intagliati (Carpinteri, 2008; Susmel, 2009b; Liu, 2015), carichi non proporzionali (Li B.C., 2014; Xia, 2015) e random (Macha, 2012; Kadhim, 2014; Wang, 2015b).

Nel seguito viene, quindi, focalizzata l'attenzione su tale approccio, introducendo le grandezze ingegneristiche correlate al piano critico.

1.5 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate al piano critico

I criteri basati sull'approccio del piano critico sono generalmente espressi in funzione delle componenti di tensione/deformazione relative al piano critico. Nei Paragrafi a seguire vengono, quindi, definite le grandezze ingegneristiche correlate al piano critico utilizzate nella progettazione a fatica in presenza di carichi multiassiali ciclici per alto (Paragrafo 1.5.1) e basso/medio numero di cicli (Paragrafo 1.5.2).

1.5.1 Componenti di tensione relative al piano critico

In un dato punto materiale P del componente strutturale in esame (*Fig. 1.14(a)*) soggetto a carichi ciclici sinusoidali, sincroni (con pulsazione pari a ω), non in fase (con angoli di fase pari a α e β), lo stato tensionale piano, caratterizzato da due tensioni normali biassiali e da una tensione tangenziale, può essere espresso come segue:

$$\sigma_x = \sigma_{x,a} \sin(\omega t) + \sigma_{x,m} \quad (1.1a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y,a} \sin(\omega t - \alpha) + \sigma_{y,m} \quad (1.1b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,a} \sin(\omega t - \beta) + \tau_{xy,m} \quad (1.1c)$$

dove t è il tempo ed i pedici a e m indicano rispettivamente l'ampiezza ed il valore medio.

In particolare, lo stato tensionale in P è descritto dal seguente tensore degli sforzi, $\boldsymbol{\sigma}(t)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,a} \sin(\omega_x t) + \sigma_{x,m} & \tau_{xy,a} \sin(\omega_{xy} t - \beta) + \tau_{xy,m} & 0 \\ \tau_{xy,a} \sin(\omega_{xy} t - \beta) + \tau_{xy,m} & \sigma_{y,a} \sin(\omega_y t - \alpha) + \sigma_{y,m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Si consideri, poi, che il piano critico, passante per il punto P , sia definito dal vettore normale \mathbf{w} (Fig. 1.14(b)). Inoltre, è possibile considerare un sistema di riferimento locale $Puvw$, dove \mathbf{u} è la direzione determinata dall'intersezione del piano critico e del piano definito dal versore normale \mathbf{w} e dall'asse Z , mentre \mathbf{v} è normale a \mathbf{u} (quindi \mathbf{v} appartiene al piano XY). I coseni direttori della direzione normale \mathbf{w} possono essere calcolati, rispetto al sistema di riferimento fisso $PXYZ$, in funzione di due angoli, φ e ϑ , in un sistema di coordinate sferiche ($0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$) (Fig. 1.14(b)):

$$\alpha_{wx} = \sin\vartheta \cos\varphi \quad \alpha_{wy} = \sin\vartheta \sin\varphi \quad \alpha_{wz} = \cos\vartheta \quad (1.3)$$

Inoltre, i coseni direttori degli assi u e v risultano, rispettivamente:

$$\alpha_{ux} = \cos\vartheta \cos\varphi \quad \alpha_{uy} = \cos\vartheta \sin\varphi \quad \alpha_{uz} = -\sin\vartheta \quad (1.4)$$

$$\alpha_{vx} = -\sin\varphi \quad \alpha_{vy} = \cos\varphi \quad \alpha_{vz} = 0 \quad (1.5)$$

Il vettore tensione \mathbf{S}_w nel punto P relativo al piano critico (Fig. 1.14(b)) può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_w = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} &\Rightarrow [S_w] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{wx} \\ \alpha_{wy} \\ \alpha_{wz} \end{bmatrix} \\ [S_w] &= \begin{bmatrix} S_{w,x} \\ S_{w,y} \\ S_{w,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\vartheta (\sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi) \\ \sin\vartheta (\tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

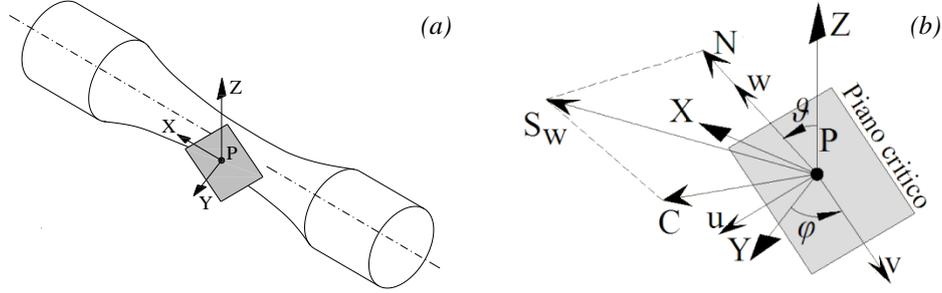


Figura 1.14 Sistema di riferimento PXYZ relativo al punto materiale P del componente strutturale (a); sistema di riferimento Puvw (gli assi \mathbf{u} e \mathbf{v} appartengono al piano critico, mentre l'asse \mathbf{w} è ortogonale al piano critico) (b).

Il modulo del vettore della tensione normale al piano critico, $N(t)$, è dato da:

$$\begin{aligned} N(t) &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w) \Rightarrow N(t) = \alpha_{wx} S_{w,x} + \alpha_{wy} S_{w,y} + \alpha_{wz} S_{w,z} \\ &= \sin^2 \vartheta [\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Il valore medio N_m e l'ampiezza N_a di $N(t)$ possono essere determinati sostituendo le componenti di tensione (Eq. (1.1)) nell'Eq. (1.7):

$$N_m = \sin^2 \vartheta [\sigma_{x,m} \cos^2 \varphi + \sigma_{y,m} \sin^2 \varphi + \tau_{xy,m} \sin 2\varphi] \quad (1.8)$$

$$N_a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.9)$$

con:

$$a = \sin^2 \vartheta [\sigma_{x,a} \cos^2 \varphi + \sigma_{y,a} \cos \alpha \sin^2 \varphi + \tau_{xy,a} \cos \beta \sin 2\varphi] \quad (1.10)$$

$$b = -\sin^2 \vartheta [\sigma_{y,a} \sin \alpha \sin^2 \varphi + \tau_{xy,a} \sin \beta \sin 2\varphi] \quad (1.11)$$

Il valore massimo della tensione normale $N(t)$ si ottiene sommando ampiezza e valore medio:

$$N_{\max} = N_a + N_m \quad (1.12)$$

Il vettore della componente di tensione normale, \mathbf{N} , si ottiene dall'Eq. (1.7):

$$\mathbf{N} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w) \mathbf{w} \Rightarrow [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^3 \vartheta \cos \varphi (\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi) \\ \sin^3 \vartheta \sin \varphi (\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi) \\ \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Dalle Eq. (1.6) e (1.13), il vettore della tensione tangenziale \mathbf{C} , che giace sul piano critico, può essere calcolato attraverso la seguente espressione:

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_w - \mathbf{N} \Rightarrow [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

dove:

$$C_x = \sin \vartheta [\cos \varphi (\sigma_x \cos^2 \vartheta + (\sigma_x - \sigma_y) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) + \tau_{xy} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi)] \quad (1.15a)$$

$$C_y = \sin \vartheta [\sin \varphi (\sigma_y \cos^2 \vartheta + (\sigma_y - \sigma_x) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) + \tau_{xy} \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi)] \quad (1.15b)$$

$$C_z = -\sin^2 \vartheta \cos \vartheta [\sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + \tau_{xy} \sin 2\varphi] \quad (1.15c)$$

La direzione del vettore \mathbf{C} varia nel tempo e, quindi, la definizione dell'ampiezza e del valore medio di tale vettore rappresenta un problema complesso. Papadopoulos e collaboratori (Papadopoulos, 1997) hanno proposto di valutare le componenti di \mathbf{C} lungo gli assi u e v , rispettivamente:

$$C_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow C_u = \alpha_{ux} C_x + \alpha_{uy} C_y + \alpha_{uz} C_z \quad (1.16)$$

$$C_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow C_v = \alpha_{vx} C_x + \alpha_{vy} C_y + \alpha_{vz} C_z \quad (1.17)$$

Richiamando le Eq. (1.1) e (1.15), si ottiene:

$$C_u = f \sin(\omega t) + g \cos(\omega t) + C_{u,m} \quad (1.18)$$

$$C_v = p \sin(\omega t) + q \cos(\omega t) + C_{v,m} \quad (1.19)$$

dove i valori $C_{u,m}$ e $C_{v,m}$ delle componenti di \mathbf{C} lungo gli assi u e v sono dati da:

$$C_{u,m} = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\sigma_{x,m} \cos^2 \varphi + \sigma_{y,m} \sin^2 \varphi + \tau_{xy,m} \sin 2\varphi] \quad (1.20)$$

$$C_{v,m} = \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} (\sigma_{y,m} - \sigma_{x,m}) \sin 2\varphi + \tau_{xy,m} \cos 2\varphi \right] \quad (1.21)$$

mentre f, g, p, q , funzioni di φ e ϑ , degli angoli di fase α e β e dell'ampiezza delle tensioni agenti, sono espresse come segue:

$$f = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\sigma_{x,a} \cos^2 \varphi + \sigma_{y,a} \cos \alpha \sin^2 \varphi + \tau_{xy,a} \cos \beta \sin 2\varphi] \quad (1.22)$$

$$g = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\sigma_{y,a} \sin \alpha \sin^2 \varphi + \tau_{xy,a} \sin \beta \sin 2\varphi] \quad (1.23)$$

$$p = \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} (\sigma_{y,a} \cos \alpha - \sigma_{x,a}) \sin 2\varphi + \tau_{xy,a} \cos \beta \cos 2\varphi \right] \quad (1.24)$$

$$q = -\sin \vartheta \left[\frac{1}{2} \sigma_{y,a} \sin \alpha \sin 2\varphi + \tau_{xy,a} \sin \beta \cos 2\varphi \right] \quad (1.25)$$

Le Eq. (1.18) e (1.19) rappresentano le equazioni parametriche dell'ellisse Σ descritta dal vettore C sul piano critico, durante un ciclo di carico (Fig. 1.15). Tale ellisse è centrata nel punto di coordinate $(C_{u,m}; C_{v,m})$, ed i suoi semiassi possono essere calcolati come segue:

$$C_{a,b} = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (1.26)$$

Il valore medio C_m della componente tangenziale C sul piano critico si ottiene dalla seguente relazione:

$$C_m = \sqrt{C_{u,m}^2 + C_{v,m}^2} \quad (1.27)$$

mentre l'ampiezza di C coincide con il semiasse maggiore C_a dell'ellisse (Fig. 1.15).

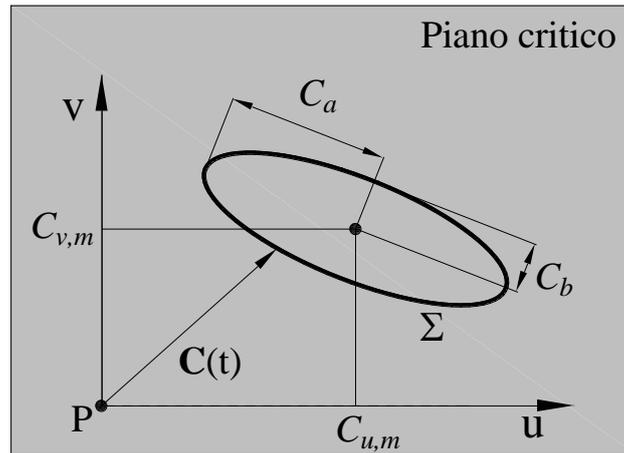


Figura 1.15 Percorso ellittico Σ descritto dal vettore C sul piano critico nel caso di carichi sinusoidali, sincroni, con segnali non in fase.

1.5.2 Componenti di spostamento relative al piano critico

In un dato punto materiale P appartenente al componente strutturale in esame (Fig. 1.16(a)) soggetto a carichi ciclici sinusoidali, sincroni (con pulsazione pari a ω), non in fase (con angoli di fase pari a κ , α e β), lo stato deformativo, caratterizzato da due deformazioni normali trasversali, da una deformazione normale assiale e da una deformazione tangenziale, può essere espresso come segue:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r,a} \sin(\omega t - \kappa) + \varepsilon_{r,m} \quad (1.28a)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t,a} \sin(\omega t - \alpha) + \varepsilon_{t,m} \quad (1.28b)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z,a} \sin(\omega t) + \varepsilon_{z,m} \quad (1.28c)$$

$$\gamma_{zt} = \gamma_{zt,a} \sin(\omega t - \beta) + \gamma_{zt,m} \quad (1.28d)$$

dove t è il tempo ed i pedici a e m indicano rispettivamente l'ampiezza ed il valore medio.

In particolare, lo stato deformativo in P è descritto dal seguente tensore delle deformazioni, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t(t) & \frac{1}{2}\gamma_{zt}(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zt}(t) & \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,a} \sin(\omega t - \kappa) + \varepsilon_{r,m} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t,a} \sin(\omega t - \alpha) + \varepsilon_{t,m} & \frac{1}{2}\gamma_{zt,a} \sin(\omega t - \beta) + \frac{1}{2}\gamma_{zt,m} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zt,a} \sin(\omega t - \beta) + \frac{1}{2}\gamma_{zt,m} & \varepsilon_{z,a} \sin(\omega t) + \varepsilon_{z,m} \end{bmatrix}$$

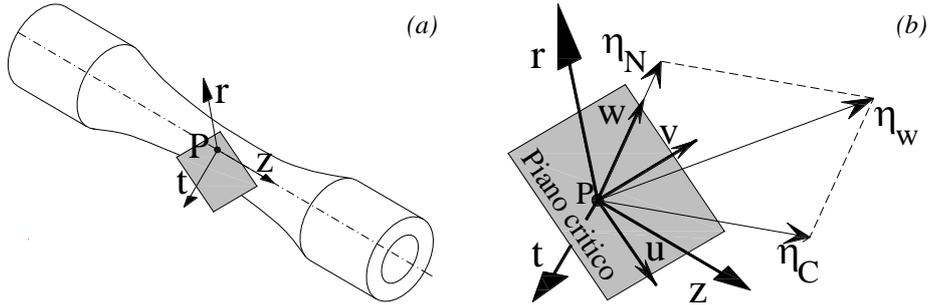


Figura 1.16 Sistema di riferimento $Prtz$ relativo al punto materiale P del componente strutturale (a); sistema di riferimento $Puvw$ (gli assi \mathbf{u} e \mathbf{v} appartengono al piano critico, mentre l'asse \mathbf{w} è ortogonale al piano critico) (b).

Si consideri, poi, che il piano critico, passante per il punto P , sia definito dal vettore normale \mathbf{w} (Fig. 1.16(b)). Inoltre, è possibile considerare un sistema di riferimento locale $Puvw$, dove \mathbf{u} è la direzione determinata dall'intersezione del piano critico e del piano definito dal versore normale \mathbf{w} e dall'asse z , mentre \mathbf{v} è normale a \mathbf{u} (quindi \mathbf{v} appartiene al piano rt). I coseni direttori della direzione normale \mathbf{w} possono essere calcolati, rispetto al sistema di riferimento fisso $Prtz$,

in funzione di due angoli, φ e ϑ , in un sistema di coordinate sferiche ($0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$) (Fig. 1.16(b)):

$$\alpha_{wr} = \sin\vartheta \cos\varphi \quad \alpha_{wt} = \sin\vartheta \sin\varphi \quad \alpha_{wz} = \cos\vartheta \quad (1.30)$$

Inoltre, i coseni direttori degli assi u e v risultano, rispettivamente:

$$\alpha_{ur} = \cos\vartheta \cos\varphi \quad \alpha_{ut} = \cos\vartheta \sin\varphi \quad \alpha_{uz} = -\sin\vartheta \quad (1.31)$$

$$\alpha_{vr} = -\sin\varphi \quad \alpha_{vt} = \cos\varphi \quad \alpha_{vz} = 0 \quad (1.32)$$

Il vettore spostamento $\boldsymbol{\eta}_w$ nel punto P relativo al piano critico (Fig. 1.16(b)) può essere calcolato come segue:

$$\boldsymbol{\eta}_w = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{w} \Rightarrow [\eta_w] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & \frac{1}{2}\gamma_{zt} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{zt} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{wr} \\ \alpha_{wt} \\ \alpha_{wz} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$[\eta_w] = \begin{bmatrix} \eta_{w,r} \\ \eta_{w,t} \\ \eta_{w,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \sin\vartheta \cos\varphi \\ \varepsilon_t \sin\vartheta \sin\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{zt} \cos\vartheta \\ \frac{1}{2}\gamma_{zt} \sin\vartheta \sin\varphi + \varepsilon_z \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Il modulo del vettore della componente di spostamento normale, $\eta_N(t)$, è dato da:

$$\eta_N(t) = (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\eta}_w) \Rightarrow \eta_N(t) = \alpha_{wr}\eta_{w,r} + \alpha_{wt}\eta_{w,t} + \alpha_{wz}\eta_{w,z} \quad (1.34)$$

$$= \sin^2\vartheta [\varepsilon_r \cos^2\varphi + \varepsilon_t \sin^2\varphi] + \varepsilon_z \cos^2\vartheta + \gamma_{zt} \sin\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta$$

Il valore medio $\eta_{N,m}$ e l'ampiezza $\eta_{N,a}$ di $\eta_N(t)$ possono essere determinati sostituendo le componenti di deformazione (Eq. (1.28)) nell'Eq. (1.34):

$$\eta_{N,m} = \sin^2\vartheta [\varepsilon_{r,m} \cos^2\varphi + \varepsilon_{t,m} \sin^2\varphi] + \varepsilon_{z,m} \cos^2\vartheta + \gamma_{zt,m} \sin\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \quad (1.35)$$

$$\eta_{N,a} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.36)$$

con:

$$a = \sin^2 \vartheta [\varepsilon_{r,a} \cos \kappa \cos^2 \varphi + \varepsilon_{t,a} \cos \alpha \sin^2 \varphi] + \varepsilon_{z,a} \cos^2 \vartheta + \gamma_{zt,a} \cos \beta \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (1.37)$$

$$b = -\sin^2 \vartheta [\varepsilon_{r,a} \sin \kappa \cos^2 \varphi + \varepsilon_{t,a} \sin \alpha \sin^2 \varphi] - \gamma_{zt,a} \sin \beta \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (1.38)$$

Il valore massimo della componente di spostamento normale $\eta_N(t)$ si ottiene sommando ampiezza e valore medio:

$$\eta_{N,\max} = \eta_{N,a} + \eta_{N,m} \quad (1.39)$$

Il vettore della componente di tensione normale, $\boldsymbol{\eta}_N$, si ottiene dall'Eq. (1.34):

$$\boldsymbol{\eta}_N = (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\eta}_w) \mathbf{w} \Rightarrow [\eta_N] = \begin{bmatrix} \eta_{N,r} \\ \eta_{N,t} \\ \eta_{N,z} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

dove:

$$\eta_{N,r} = \sin^3 \vartheta \cos \varphi [\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_t \sin^2 \varphi] + \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi [\varepsilon_z \cos \vartheta + \gamma_{zt} \sin \vartheta \sin \varphi] \quad (1.41a)$$

$$\eta_{N,t} = \sin^3 \vartheta \sin \varphi [\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_t \sin^2 \varphi] + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi [\varepsilon_z \cos \vartheta + \gamma_{zt} \sin \vartheta \sin \varphi] \quad (1.41b)$$

$$\eta_{N,z} = \sin^2 \vartheta \cos \vartheta [\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_t \sin^2 \varphi] + \cos^2 \vartheta [\varepsilon_z \cos \vartheta + \gamma_{zt} \sin \vartheta \sin \varphi] \quad (1.41c)$$

Dalle Eq. (1.33) e (1.40)-(1.41), il vettore della componente di spostamento tangenziale $\boldsymbol{\eta}_C$, che giace sul piano critico, può essere calcolato attraverso la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\eta}_C = \boldsymbol{\eta}_w - \boldsymbol{\eta}_N \Rightarrow [\eta_C] = \begin{bmatrix} \eta_{C,r} \\ \eta_{C,t} \\ \eta_{C,z} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

dove:

$$\eta_{C,r} = \sin \vartheta \left[\cos \varphi (\varepsilon_r \cos^2 \vartheta + (\varepsilon_r - \varepsilon_t) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \varepsilon_z \cos^2 \vartheta) \right] - \gamma_{zt} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.43a)$$

$$\eta_{C,t} = \sin \vartheta \left[\sin \varphi (\varepsilon_t \cos^2 \vartheta + (\varepsilon_t - \varepsilon_r) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \varepsilon_z \cos^2 \vartheta) \right] + \frac{1}{2} \gamma_{zt} \cos \vartheta (1 - 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) \quad (1.43b)$$

$$\eta_{C,z} = -\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left[\varepsilon_r \cos^2 \varphi + \varepsilon_t \sin^2 \varphi - \varepsilon_z \right] + \frac{1}{2} \gamma_{zt} \sin \vartheta \sin \varphi (1 - 2 \cos^2 \vartheta) \quad (1.43c)$$

La direzione del vettore $\boldsymbol{\eta}_C$ varia nel tempo e, quindi, per la definizione della sua ampiezza e del suo valore medio si può procedere in modo del tutto analogo a quanto presentato al Paragrafo 1.5.1 (Papadopoulos, 1997):

$$\eta_{C_u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_C \Rightarrow \eta_{C_u} = \alpha_{ur} \eta_{C,r} + \alpha_{ut} \eta_{C,t} + \alpha_{uz} \eta_{C,z} \quad (1.44)$$

$$\eta_{C_v} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}_C \Rightarrow \eta_{C_v} = \alpha_{vr} \eta_{C,r} + \alpha_{vt} \eta_{C,t} + \alpha_{vz} \eta_{C,z} \quad (1.45)$$

Richiamando le Eq. (1.28) e (1.43), si ottiene:

$$\eta_{C_u} = f \sin(\omega t) + g \cos(\omega t) + \eta_{C_{u,m}} \quad (1.46)$$

$$\eta_{C_v} = p \sin(\omega t) + q \cos(\omega t) + \eta_{C_{v,m}} \quad (1.47)$$

dove i valori $\eta_{C_{u,m}}$ e $\eta_{C_{v,m}}$ delle componenti di $\boldsymbol{\eta}_C$ lungo gli assi u e v sono dati da:

$$\eta_{C_{u,m}} = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\varepsilon_{r,m} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{t,m} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{z,m}] + \frac{1}{2} \gamma_{zt,m} \cos 2\vartheta \sin \varphi \quad (1.48)$$

$$\eta_{C_{v,m}} = \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{t,m} - \varepsilon_{r,m}) \sin 2\varphi \right] + \frac{1}{2} \gamma_{zt,m} \cos \vartheta \cos \varphi \quad (1.49)$$

mentre f, g, p, q , funzioni di φ e ϑ , degli angoli di fase κ, α e β e dell'ampiezza delle deformazioni agenti, sono espresse come segue:

$$f = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\varepsilon_{r,a} \cos \kappa \cos^2 \varphi + \varepsilon_{t,a} \cos \alpha \sin^2 \varphi - \varepsilon_{z,a}] + \frac{1}{2} \gamma_{zt,a} \cos \beta \cos 2\vartheta \sin \varphi \quad (1.50)$$

$$g = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta [\varepsilon_{r,a} \sin \kappa \cos^2 \varphi + \varepsilon_{t,a} \sin \alpha \sin^2 \varphi] - \frac{1}{2} \gamma_{zt,a} \sin \beta \cos 2\vartheta \sin \varphi \quad (1.51)$$

$$p = \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{t,a} \cos \alpha - \varepsilon_{r,a} \cos \kappa) \sin 2\varphi \right] + \frac{1}{2} \gamma_{zt,a} \cos \beta \cos \vartheta \cos \varphi \quad (1.52)$$

$$q = -\sin \vartheta \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{t,a} \sin \alpha - \varepsilon_{r,a} \sin \kappa) \sin 2\varphi \right] - \frac{1}{2} \gamma_{zt,a} \sin \beta \cos \vartheta \cos \varphi \quad (1.53)$$

Le Eq. (1.46) e (1.47) rappresentano le equazioni parametriche dell'ellisse Σ descritta dal vettore $\boldsymbol{\eta}_C$ sul piano critico, durante un ciclo di carico (l'ellisse Σ è del tutto analoga a quella riportata in Fig. 1.15). Tale ellisse è centrata nel punto di coordinate $(\eta_{C_{u,m}}; \eta_{C_{v,m}})$, ed i suoi semiassi possono essere calcolati come segue:

$$\eta_{C_{a,b}} = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2} \quad (1.54)$$

Il valore medio $\eta_{C,m}$ della componente di spostamento tangenziale $\boldsymbol{\eta}_C$ sul piano critico si ottiene dalla seguente relazione:

$$\eta_{C,m} = \sqrt{\eta_{C,u,m}^2 + \eta_{C,v,m}^2} \quad (1.55)$$

mentre l'ampiezza di η_C coincide con il semiasse maggiore $\eta_{C,a}$ dell'ellisse Σ .

1.6 Bibliografia

- Albert W.A.J. (1838) Über Treibseile am Harz. *Archive für Mineralogie Geognosie Bergbau und Hüttenkunde* 10, 215.
- Anes V., Reis L., Li B., De Freitas M. (2014) Crack path evaluation on HC and BCC microstructures under multiaxial cyclic loading. *International Journal of Fatigue* 58, 102-113.
- ASTM E1823-13 (2013) *Annual Book of ASTM Standards: Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing*. ASTM, West Conshohocken, USA.
- Berto F., Campagnolo A., Lazzarin P. (2015) Fatigue strength of severely notched specimens made of Ti-6Al-4V under multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 38, 503-517.
- Broek D. (1982) *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, The Netherlands.
- Brown M.W., Miller K.J. (1973) A theory for fatigue failure under multi-axial stress-strain condition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 187, 745-55.
- Capetta S., Tovo R., Taylor D., Livieri P. (2011) Numerical evaluation of fatigue strength on mechanical notched components under multiaxial loadings. *International Journal of Fatigue* 33, 661-671.
- Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. (2000) A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 23, 355-364.
- Carpinteri A., Karolczuk A., Macha E., Vantadori S. (2002) Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles. *International Journal of Fracture* 115, 87-99.
- Carpinteri A., De Freitas M., Spagnoli A. (2003) *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*. Elsevier, Amsterdam.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori V., Viappiani D. (2008) A multiaxial criterion for notch high-cycle fatigue using a critical-point method. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1864-1874.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.

-
- Carpinteri A., Ronchei C., Vantadori S. (2013) Stress-Intensity Factors and fatigue growth of surface cracks in notched shells and round bars: two decades of research work. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 1164-1177.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Fatigue life estimation for multiaxial low-cycle fatigue regime: the influence of the effective Poisson ratio value. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 79, 77-83.
- Chen X., Gao Q., Sun X.F. (1996) Low-cycle fatigue under nonproportional loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 19, 839-854.
- Coffin L.F. (1954) A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions of the ASME* 76, 931-950.
- Cristofori A., Tovo R. (2009) An invariant-based approach for high-cycle fatigue calculation. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 32, 310-324.
- Crossland B. (1956) Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In: *Proceedings of International Conference on Fatigue of Metals*, Institution of Mechanical Engineering, London, 138-149.
- Deperrois A. (1991) *Sur le calcul de limites d'endurance des aciers*. Tesi di Dottorato, Ecole Polytechnique, Parigi, Francia.
- Dowling N.E. (1999) *Mechanical behaviour of materials*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Ellyin F. (1989) Cyclic strain energy density as a criterion for multiaxial fatigue failure. In: *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, a cura di M.W. Brown e K.J. Miller, Mechanical Engineering Publications, London, 571-583.
- Ellyin F. (1997) *Fatigue damage, crack growth and life prediction*. Chapman and Hall, Edmonton.
- Fatemi A., Socie D.F. (1988) A critical plane approach to multiaxial fatigue including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 11, 149-166.
- Filippini M., Foletti S., Papadopoulos I.V., Sonsino C.M. (2003) A multiaxial fatigue life criterion for non-symmetrical and non-proportional elasto-plastic

- deformation. In: *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, a cura di A. Carpinteri, M. de Freitas e A. Spagnoli, Elsevier, Amsterdam, 383-400.
- Findley W.N. (1959) A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME 81, 301-306.
- Fuchs H.O., Stephens I. (1980) *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons, New York.
- Gao X., Dodds R.H. Jr, Tregoning R.L., Joyce J.A. (2001) Weibull stress model for cleavage fracture under high-rate loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 24, 551-564.
- Garud Y.S. (1981) A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 103, 118-125.
- Jasper T.M. (1923) The value of the energy relation in the testing of ferrous metals at varying ranges of stress and at intermediate and high temperatures. *Philosophical Magazine Series 6* 46, 609-627.
- Kadhim N.A., Mustafa M., Varvani-Farahani A. (2014) Fatigue life prediction of low-alloy steel samples undergoing uniaxial random block loading histories based on different energy-based damage descriptions. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 38, 69-79.
- Karolczuk A. (2006) Plastic strains and the macroscopic critical plane orientations under combined bending and torsion with constant and variable amplitudes. *Engineering Fracture Mechanics* 73, 1629-1652.
- Kiran R., Khandelwal K. (2014) Gurson model parameters for ductile fracture simulation in ASTM A992 steels. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 171-183.
- Kluger K. (2015) Fatigue life estimation for 2017A-T4 and 6082-T6 aluminium alloys subjected to bending-torsion with mean stress. *International Journal of Fatigue* 80, 22-29.
- Knott J.F. (2006) Deterministic and probabilistic modelling of brittle fracture mechanisms in ferritic steels. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 29, 714-724.

-
- Łagoda T., Ogonowski P. (2005) Criteria of multiaxial random fatigue based on stress, strain and energy parameters of damage in the critical plane. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 36, 429-437.
- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lazzarin P., Zambardi R. (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. *International Journal of Fracture* 112, 275-298.
- Lee S.B. (1980) *Evaluation of Teories on Multiaxial Fatigue with Discriminating Specimens*. Tesi di Dottorato, Stanford University, USA.
- Li B., Santos J.L., De Freitas M. (2000) A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. *Mechanics of Structures and Machines* 28, 85-103.
- Li B.C., Jiang C., Han X., Li Y. (2014) A new path-dependent multiaxial fatigue model for metals under different paths. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 206-218.
- Li J., Li C., Qiao Y., Zhang Z. (2014) Fatigue life prediction for some metallic materials under constant amplitude multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* 68, 10-23.
- Liu X.Y., Su T.X., Zhang Y., Yuan M.N. (2015) A multiaxial high-cycle fatigue life evaluation model for notched structural components. *International Journal of Fatigue* 80, 443-448.
- Lopez-Crespo P., Moreno B., Lopez-Moreno A., Zapatero J. (2015) Study of crack orientation and fatigue life prediction in biaxial fatigue with critical plane models. *Engineering Fracture Mechanics* 136, 115-130.
- Macha E. (1989) Simulation investigations of the position of fatigue fracture plane in materials with biaxial loads. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 20, 132-136 e 153-163.
- Macha E., Niesłony A. (2012) Critical plane fatigue life models of materials and structures under multiaxial stationary random loading: the state-of-the-art in Opole Research Centre CESTI and directions of future activities. *International Journal of Fatigue* 39, 95-102.

-
- Mamiya E.N., Castro F.C., Araújo J.A. (2014a) Recent developments on multiaxial fatigue: the contribution of the University of Brasília. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73, 48-59.
- Mamiya E.N., Castro F.C., Malcher L., Araújo J.A. (2014b) Multiaxial fatigue life estimation based on combined deviatoric strain amplitudes. *International Journal of Fatigue* 67, 117-122.
- Manson S.S. (1965) Fatigue: a complex subject - Some simple approximations. *Experimental Mechanics* 5, 193-226.
- Marquis G.B., Karjalainen-Roikonen P. (2003) Long-life multiaxial fatigue of a nodular graphite cast iron. In: *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, a cura di A. Carpinteri, M. de Freitas e A. Spagnoli, Elsevier, Amsterdam, 383-400.
- Matake T. (1977) An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers* 20, 257-263.
- McDiarmid D.L. (1987) Fatigue under out-of-phase bending and torsion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 9, 457-475.
- McDiarmid D.L. (1991) A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 14, 429-453.
- Miner M.A. (1945) Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* 12, 159-164.
- Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A. (1997) A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue* 19, 219-235.
- Paris P.C., Erdogan F. (1963) A critical analysis of crack propagation laws. *Journal Basic Engineering* 85D, 528-534.
- Park J., Nelson D. (2000) Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life. *International Journal of Fatigue* 22, 23-39.
- Poncelet J.V. (1841) *Introduction à la Mécanique Industrielle, Physique ou Expérimentale*. Mme. Thiel Éditeur, Paris.
- Qian X., Chen S. (2014) A K0-based calibration procedure for the Weibull stress cleavage model. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 391-405.

-
- Rodríguez-Martín R., Ocaña I., Martín-Meizoso A. (2007) Brittle fracture of high-strength steels at very low temperatures. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 30, 664-670.
- Sakane M., Itoh T., Kida S., Ohnami M., Socie D.F. (1999) Dislocation structure and non-proportional hardening of type 304 stainless steel. In: *Multiaxial Fatigue and Fracture*, a cura di E. Macha, W. Bedkowski e T. Łagoda, Elsevier, Amsterdam, 130-144.
- Spangenberg L. (1876) *Fatigue of Metals under Repeated Strains: with Various Tables of Results of Experiments*. D. Van Nostrand Publisher, New York.
- Socie D.F. (1987) Multiaxial fatigue damage models. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 109, 293-298.
- Socie D.F., Marquis G.B. (1999) *Multiaxial Fatigue*. Society of Automotive Engineers, Warrendale, USA.
- Sonsino C.M., Grubisic V. (1989) Fatigue behaviour of cyclically softening and hardening steels under multiaxial elastic-plastic deformation. In: *Multiaxial Fatigue*, a cura di M.W. Brown e K.J. Miller, ASTM 853, American Society for testing and materials, Philadelphia, pp. 586-605.
- Suresh S. (1998) *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Susmel L., Lazzarin P. (2002) A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 25, 63-78.
- Susmel L., Petrone N. (2003) Multiaxial fatigue life estimations for 6082-T6 cylindrical specimens under in-phase and out-of-phase biaxial loadings. In: *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, a cura di A. Carpinteri, M. de Freitas e A. Spagnoli, Elsevier, Amsterdam, 383-400.
- Susmel L. (2009a) *Multiaxial notch fatigue*. Woodhead Publishing Limited, Cambridge.
- Susmel L., Meneghetti G., Atzori B. (2009b) A simple and efficient reformulation of the classical Manson–Coffin curve to predict lifetime under multiaxial fatigue loading – Part I (Plain materials) e Part II (Notches). *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 131, 021009–1-021009–9 e 021010–1-021010–8.

-
- Susmel L. (2010) A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *International Journal of Fatigue* 32, 1875-1883.
- Susmel L., Lazzarin P. (2013) A stress-based method to predict lifetime under multiaxial fatigue loadings. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 1171-1187.
- Susmel L., Tovo R., Socie D.F. (2014) Estimating the orientation of Stage I crack paths through the direction of maximum variance of the resolved shear stress. *International Journal of Fatigue* 58, 94-101.
- Taktak R., Benseddiq N., Imad A. (2009) Analysis of ductile tearing using a local approach to fracture. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 32, 525-530.
- Taylor D. (2007) *The Theory of Critical Distances: a New Perspective in Fracture Mechanics*. Elsevier, Amsterdam.
- Vu Q.H., Halm D., Nadot Y. (2010) Multiaxial fatigue criterion for complex loading based on stress invariants. *International Journal of Fatigue* 32, 1004-1014.
- Walat K., Łagoda T., Kurek M. (2015) Life time assessment of an aluminum alloy under complex low cycle fatigue loading. *Materialpruefung/Materials Testing* 57, 160-164.
- Wallin K., Laukkanen A. (2006) Aspects of cleavage fracture initiation - relative influence of stress and strain. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 29, 788-798.
- Wang C.H., Brown M.W. (1973) A path-independent parameter for fatigue under proportional non-proportional loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 16, 1285-1298.
- Wang C., Shang D.G., Wang X.W. (2015a) A new multiaxial high-cycle fatigue criterion based on the critical plane for ductile and brittle materials. *Journal of Materials Engineering and Performance* 24, 816-824.
- Wang C., Shang D.G., Wang X.W., Chen H., Liu J.Z. (2015b) Comparison of HCF life prediction methods based on different critical planes under multiaxial variable amplitude loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 38, 392-401.

-
- Wöhler A. (1871) Tests to determine the forces acting on railway carriage axles and the capacity of resistance of the axles. *Engineering* 11.
- Wood W.A. (1958) Recent observations on fatigue fracture in metals. *ASTM STP* 237, 110-121.
- Xia T., Yao W., Zou J., Gao D. (2015) A novel accumulative fatigue damage model for multiaxial step spectrum considering the variations of loading amplitude and loading path. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 39, 194-205.
- Xu F., Zhao S.D., Han X.L. (2014) Use of a modified Gurson model for the failure behaviour of the clinched joint on Al6061 sheet. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 335-348.

VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI CICLICI E ALTO NUMERO DI CICLI

2.1 Introduction

The present Chapter deals with the problem of fatigue strength evaluation under high-cycle fatigue (HCF) for metallic structural components subjected to multiaxial constant-amplitude cyclic loadings. In particular, the problem is addressed by applying a new criterion developed on the basis of a previous formulation proposed by Carpinteri and co-workers in 2011 (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a). Such a criterion belongs to the category of criteria based on the critical plane approach (see Chapter 1) and, in HCF regime, is formulated in terms of stresses.

According to the above criterion, the orientation of the critical plane is assumed to be correlated with the averaged directions of the principal stress axes (Carpinteri, 1999; Carpinteri, 2000). Such averaged directions are computed by taking into account a weight function, which is deemed to be dependent on both the maximum principal stress $\sigma_1(t)$ over the loading cycle and two material parameters, i.e. the fully reversed normal stress fatigue limit, $\sigma_{af,-1}$, and the fully reversed shear stress fatigue limit, $\tau_{af,-1}$. Further, a nonlinear combination of the amplitudes of the stress components (normal stress and shear stress) acting on the critical plane is employed as fatigue damage parameter.

The validation of such a criterion has been performed by employing experimental data available in the literature, and the results prove that the criterion provides satisfactory multiaxial fatigue strength estimations, independent of the loading conditions and materials being analysed (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a). Moreover, a capability of the high-cycle multiaxial fatigue criterion is that it can be applied to different structural component configurations, i.e. to both

smooth (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a) and notched specimens (Carpinteri, 2008), and welded joints (Carpinteri, 2009).

One of the aims of the present Ph.D. Thesis is to suggest some modifications to the original formulation of the criterion in order to improve its fatigue strength estimation capability and effectiveness from a computational point of view.

In particular, the first modification is to implement different relationships, related to the critical plane orientation and available in the literature (Łagoda, 2014), in the original criterion. Some results on this issue have been published in Refs. (Carpinteri, 2015; Ronchei, 2015). Moreover, the Prismatic Hull (PH) method recently proposed by Araújo (Araújo, 2011) to evaluate the shear stress amplitude acting on the critical plane is implemented in the original criterion and some results can be found in (Carpinteri, 2013b; Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b).

Finally, the validation of the new formulations proposed in the present Ph.D. Thesis is performed by employing experimental data available in the literature, related to stress-controlled multiaxial HCF tests performed on smooth specimens made of alloys steel (Nishihara, 1945; Heidenreich, 1983; Kaniut, 1983; Lee, 1985; McDiarmid, 1985; Zenner, 1985; Bhonghibhat, 1986; Troost, 1987; Froustey, 1989; Sanetra, 1991; Łagoda, 1994; Krzysztof, 2014) and aluminum alloys (Kurek, 2014; Niesłony, 2014).

2.1 Introduzione

Il presente Capitolo è dedicato al problema della valutazione della resistenza a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a carichi ciclici e alto numero di cicli, problema che viene affrontato impiegando un nuovo criterio, sviluppato intervenendo su una precedente formulazione proposta da Carpinteri e collaboratori nel 2011 (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a).

In particolare, il criterio sul quale sono intervenuta appartiene alla categoria dei criteri basati sull'approccio del piano critico (approccio presentato al Capitolo 1) e, per regimi ad alto numero di cicli di carico, risulta formulato in termini di tensioni.

Secondo tale criterio, la giacitura del piano critico è correlata alle direzioni medie delle direzioni principali di tensione (Carpinteri, 1999; Carpinteri, 2000). Tali direzioni vengono determinate impiegando una opportuna funzione peso, che

dipende sia dalla massima tensione principale $\sigma_1(t)$, registrata in un ciclo di carico, sia da parametri propri del materiale, quali il limite di fatica per tensione normale alterna, $\sigma_{af,-1}$, e il limite di fatica per tensione tangenziale alterna, $\tau_{af,-1}$. Secondo tale criterio la valutazione della resistenza a fatica viene eseguita attraverso una combinazione non lineare delle ampiezze delle componenti di tensione (normale e tangenziale) agenti sul piano critico.

La formulazione del criterio è stata ampiamente validata attraverso dati sperimentali di letteratura e, dall'analisi dei risultati ottenuti, il criterio mostra risultati soddisfacenti per differenti condizioni di carico e materiali analizzati (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a). Inoltre, il criterio per alto numero di cicli mostra risultati piuttosto soddisfacenti per diverse configurazioni geometriche del componente strutturale, quali: provini lisci (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a), intagliati (Carpinteri, 2008) e giunti saldati (Carpinteri, 2009).

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dal proporre alcune modifiche alla formulazione originale del criterio, al fine di migliorarne la precisione nell'ambito della valutazione della resistenza a fatica multiassiale di componenti strutturali e l'efficacia dal punto di vista computazionale.

In particolare, il mio primo intervento è relativo all'implementare all'interno del criterio (Carpinteri, 2015; Ronchei, 2015) differenti formulazioni per la definizione del piano critico e disponibili in letteratura (Łagoda, 2014). Inoltre, un metodo alternativo disponibile in letteratura per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale sul piano critico, e noto come Prismatic Hull method (Araújo, 2011), viene implementato all'interno del criterio (Carpinteri, 2013b; Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b).

Infine, per verificare la validità delle nuove formulazioni proposte nell'ambito della presente Tesi, vengono esaminati dati sperimentali di letteratura, relativi a prove di fatica multiassiale ad alto numero di cicli condotte su provini lisci realizzati in leghe di acciaio (Nishihara, 1945; Heidenreich, 1983; Kaniut, 1983; Lee, 1985; McDiarmid, 1985; Zenner, 1985; Bhongbhibhat, 1986; Troost, 1987; Froustey, 1989; Sanetra, 1991; Łagoda, 1994; Krzysztof, 2014) e di alluminio (Kurek, 2014; Niesłony, 2014).

2.2 Il criterio nella sua formulazione originale

La valutazione della resistenza a fatica per alto numero di cicli viene eseguita considerando lo stato tensionale che si realizza sul piano critico in corrispondenza di un punto ritenuto critico per la resistenza a fatica del materiale e generalmente posizionato in prossimità della superficie esterna del componente strutturale.

Il criterio si compone delle seguenti fasi:

- (i) determinazione delle direzioni medie principali di tensione;
- (ii) determinazione della giacitura del piano critico;
- (iii) determinazione delle componenti di tensione agenti sul piano critico (valore medio e ampiezza della componente normale e ampiezza della componente tangenziale);
- (iv) valutazione della resistenza a fatica eseguita attraverso una combinazione quadratica dell'ampiezza di una tensione normale equivalente e dell'ampiezza della tensione tangenziale, entrambe relative al piano critico.

Tali fasi, riportate graficamente in *Figura 2.1*, vengono discusse dettagliatamente nei seguenti Paragrafi.

2.2.1 Direzioni medie principali di tensione

Si consideri un punto P appartenente al componente strutturale soggetto ad un carico e sia $\sigma(t)$ il tensore degli sforzi relativo a P . Ad un dato istante temporale t , i coseni direttori delle direzioni principali di tensione 1, 2, e 3 (essendo $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t) \geq \sigma_3(t)$), rispetto al sistema di riferimento fisso $PXYZ$ (*Fig. 2.2(a)*), possono essere calcolati a partire dal tensore $\sigma(t)$.

Il sistema di riferimento ortogonale $P123$, con origine in P e assi coincidenti con le direzioni principali di tensione (*Fig. 2.2(b)*), può essere univocamente definito mediante i tre angoli principali di Eulero, ϕ, θ, ψ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$) che descrivono tre rotazione antiorarie successive intorno agli assi Z, Y' e 3 , rispettivamente.

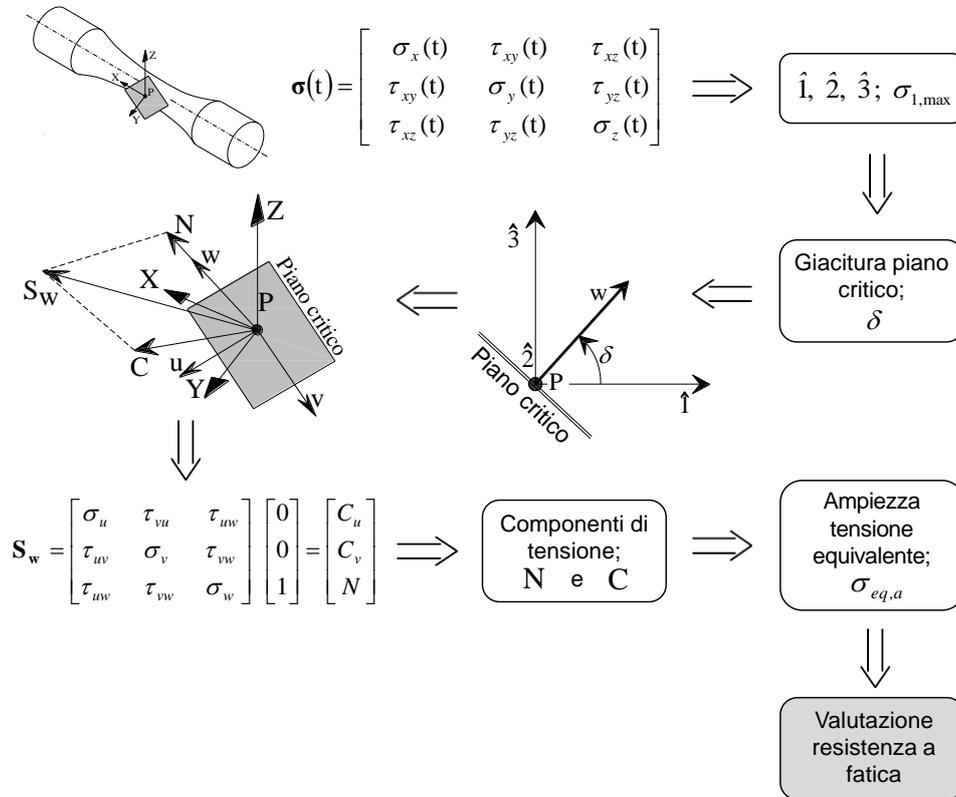


Figura 2.1 Rappresentazione grafica della formulazione del criterio.

Il procedimento da seguire per determinare tali angoli si compone di due fasi (Carpinteri, 1999), e risulta piuttosto lungo, anche se relativamente semplice. Al termine di tale procedimento, gli intervalli di definizione di tali angoli risultano ridotti ai seguenti intervalli: $0 \leq \phi, \theta \leq \pi/2$ e $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$.

Poiché in presenza di carichi ciclici ogni componente del tensore degli sforzi varia nel tempo, le direzioni principali di tensione e i corrispondenti angoli di Eulero variano anch'essi nel tempo. In particolare, come evidenziato da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 1999) la posizione delle direzioni principali di tensione varia nel tempo anche nel caso di sollecitazione uniassiale di trazione-compressione sinusoidale ($\sigma_x(t)$ di periodo T), dove la tensione principale massima σ_1 giace lungo l'asse X per $0 < t < T/2$ e nel piano YZ per $T/2 < t < T$, mentre la tensione principale σ_2 è sempre nulla (Fig. 2.3). È stato inoltre

evidenziato (Carpinteri, 2000) che nel caso di sollecitazione di flessione e torsione ($\sigma_x(t) - \tau_{xy}(t)$), la tensione principale σ_2 è sempre uguale a zero in un ciclo di carico, mentre nel caso di sollecitazione di flessione e pressione interna ($\sigma_x(t) - \sigma_y(t)$), la tensione principale nulla cambia durante il periodo T (Fig. 2.4).

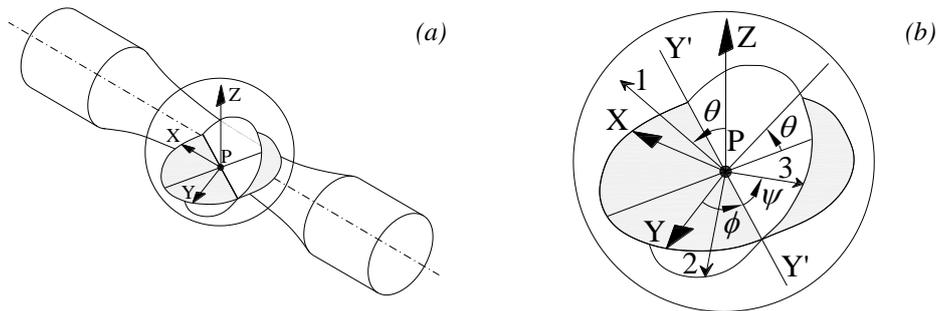


Figura 2.2 Sistema di riferimento $PXYZ$ relativo al punto P del componente strutturale (a); direzioni principali di tensione 1, 2, 3 definite mediante gli angoli di Eulero ϕ, θ, ψ (b).

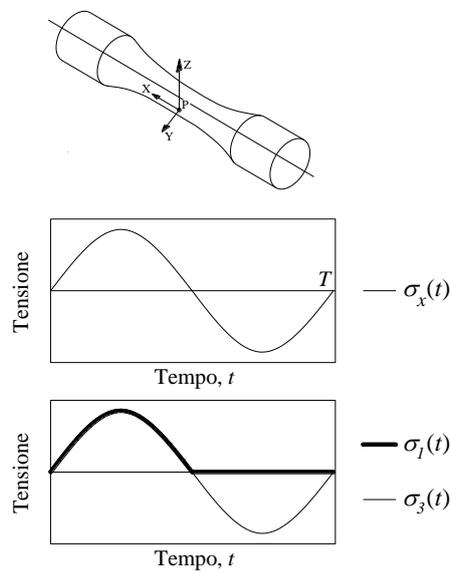


Figura 2.3 Sollecitazione uniaassiale di trazione-compressione: tensione applicata e andamento delle tensioni principali.

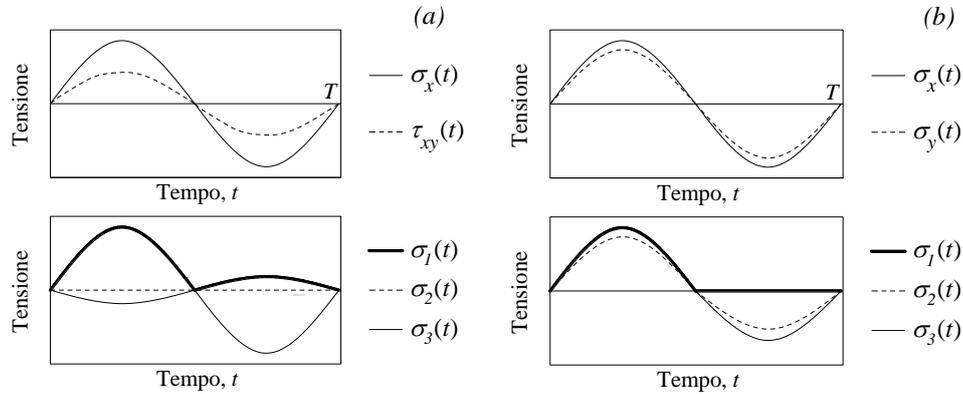


Figura 2.4 Tensioni applicate e andamento delle tensioni principali per sollecitazione di flessione e torsione (a) e flessione e pressione interna (b).

Al fine di determinare le direzioni medie $\hat{1}, \hat{2},$ e $\hat{3}$ principali di tensione, Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2011) ricorrono alla valutazione degli angoli medi di Eulero $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$ (Fig. 2.5), mediati attraverso una opportuna funzione peso:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{W} \int_0^T \phi(t) W(t) dt \quad \hat{\theta} = \frac{1}{W} \int_0^T \theta(t) W(t) dt \quad \hat{\psi} = \frac{1}{W} \int_0^T \psi(t) W(t) dt \quad (2.1)$$

essendo $T =$ periodo e $W(t) =$ funzione peso, definita come:

$$W(t) = H[\sigma_1(t) - \sigma_{1,max}] \quad (2.2)$$

con $H[x]=1$ per $x=0$ e $H[x]=0$ per $x \neq 0$ e $\sigma_{1,max}$ il valore massimo della tensione principale massima, σ_1 , in un ciclo di carico.

La funzione peso adottata è tale da non richiedere in pratica una vera e propria procedure di media, in quanto le direzioni medie principali di tensione coincidono con le direzioni principali istantanee, corrispondenti all'istante di tempo in cui la tensione principale massima, σ_1 , raggiunge il valore massimo in un ciclo di carico.

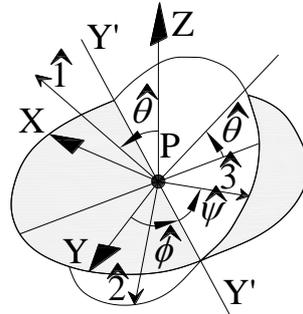


Figura 2.5 Direzioni medie principali di tensione $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ individuate dagli angoli medi di Eulero $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$.

2.2.2 Determinazione della giacitura del piano critico

Nel 1973 Brown e Miller hanno ipotizzato e dimostrato sperimentalmente come il danneggiamento a fatica multiassiale sia riconducibile agli stati tensionali e deformativi che caratterizzano un definito piano materiale, noto con il nome di piano critico (Brown, 1973). In particolare, Brown e Miller, eseguendo una accurata campagna di prove sperimentali su materiali metallici convenzionali, hanno osservato come il processo di fessurazione per fatica si compone di due fasi:

(i) una prima fase (Stage 1) in cui si ha la nucleazione della fessura (solitamente in prossimità della superficie esterna del componente strutturale) lungo il piano di massima tensione tangenziale (Modo II, piano di nucleazione della fessura). In questa fase la fessura si forma per coalescenza di microfessure e la sua dimensione interessa la scala mesoscopica, cioè il grano cristallino per i metalli;

(ii) una seconda fase (Stage 2) in cui la fessura, raggiunte grandi dimensioni, si propaga su un piano normale alla direzione della massima tensione principale (Modo I, piano finale di frattura).

Sulla base delle osservazioni sperimentali di cui sopra, molti autori hanno assunto il piano critico (cioè il piano di verifica sul quale valutare la crisi per fatica del componente strutturale) coincidente con il piano di nucleazione della fessura. Tuttavia, poiché è stato sperimentalmente osservato che alcuni materiali metallici sono caratterizzati da un meccanismo di propagazione della fessura in cui lo Stage 2 è predominante rispetto allo Stage 1 (ad esempio i metalli alla soglia tra duri ed

estremamente duri) e viceversa, una adeguata procedura per definire la giacitura del piano dovrebbe essere in grado di considerare entrambi i meccanismi di Modo I e Modo II.

La procedura proposta da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2001; Carpinteri, 2011) per determinare la giacitura del piano critico consente di tener conto sia del meccanismo di Modo I che di quello di Modo II. In particolare, tale procedura prevede di determinare inizialmente la posizione del piano di frattura e successivamente definire la giacitura del piano critico, attraverso un appropriato angolo di rotazione e che si assume dipendere dai limiti di fatica del materiale per tensione normale e torsione ciclica alterna.

In maggior dettaglio, la posizione del piano di frattura è correlata a quella delle direzioni principali di tensione, essendo la resistenza a fatica fortemente influenzata dalle tensioni principali (Macha, 1989). In accordo con tale osservazione, la normale al piano di frattura (Stage II), che è quello osservato “post mortem” a livello macroscopico, viene considerata coincidente con la direzione media $\hat{1}$ della massima tensione principale σ_1 (Carpinteri, 2000).

Al fine di verificare se l’ipotesi di cui sopra è in accordo con le risultanze sperimentali, sono stati esaminati da Carpinteri e collaboratori dati sperimentali reperiti in letteratura, relativi a provini realizzati con quattro tipologie di acciaio e due tipologie di ghise (Carpinteri, 2002). I confronti in termini di giacitura del piano di frattura sono risultati soddisfacenti, particolarmente nel caso di carichi proporzionali.

Nella formulazione originale del criterio, la giacitura del piano critico risulta correlata alle direzioni medie principali di tensione (Carpinteri, 2000; Carpinteri 2011). In particolare, l’angolo δ , compreso tra la normale \mathbf{w} al piano critico (dove \mathbf{w} appartiene al piano principale $\hat{1}\hat{3}$, Fig. 2.5) e la direzione media $\hat{1}$ della massima tensione principale (che individua la normale al piano di frattura), è definito attraverso la seguente espressione empirica:

$$\delta = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right)^2 \right] 45^\circ \quad (2.3)$$

dove $\sigma_{af,-1}$ è il limite di fatica per tensione normale alterna, e $\tau_{af,-1}$ è il limite di fatica per tensione tangenziale alterna.

In accordo con l'Eq. (2.3), l'angolo δ è pari a 0° quando il rapporto tra i limiti di fatica $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1}=1$ (metalli estremamente duri), mentre è uguale a 45° per $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1}=1/\sqrt{3}$ (valore limite tra metalli duri e dolci).

È importante sottolineare che l'Eq. (2.3) risulta in accordo con le evidenze sperimentali precedentemente introdotte (Brown, 1973). Più precisamente, quando lo Stage 2 è predominante (metalli duri), il piano critico tende a coincidere con il piano di frattura ($\delta=0^\circ$), mentre quando lo Stage 1 è predominante (metalli dolci), il piano critico tende a coincidere con il piano di nucleazione della fessura ($\delta=45^\circ$).

2.2.3 Componenti di tensione relative al piano critico

Per la valutazione della componente normale e della componente tangenziale di tensione relative al generico punto P dell'elemento strutturale, si procede come descritto al Capitolo 1, Paragrafo 1.5.1.

In particolare, definita la normale \mathbf{w} al piano critico, si considera un sistema di riferimento locale $Puvw$, dove \mathbf{u} è la direzione determinata dall'intersezione del piano critico e del piano definito dal versore normale \mathbf{w} e dall'asse Z , mentre \mathbf{v} è normale a \mathbf{u} . Tali assi vengono individuati, rispetto al sistema di riferimento fisso $PXYZ$, mediante due angoli, φ e ϑ (Fig. 2.6).

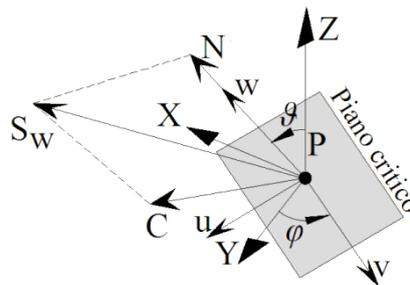


Figura 2.6 Sistema di riferimento $PXYZ$ e $Puvw$ (gli assi \mathbf{u} e \mathbf{v} appartengono al piano critico, mentre l'asse \mathbf{w} è ortogonale al piano critico).

Il vettore tensione nel punto P può essere calcolato come segue:

$$\mathbf{S}_w = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} \quad (2.4)$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}$ il tensore degli sforzi.

Per ogni istante temporale t , il vettore \mathbf{S}_w può essere scomposto in due componenti: la componente di tensione normale N (perpendicolare al piano critico) e la componente di tensione tangenziale C (agente sul piano critico) (Fig. 2.6), e calcolate come segue:

$$N = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w) \mathbf{w} \quad \mathbf{C} = \mathbf{S}_w - N \quad (2.5)$$

In presenza di carichi multiassiali ciclici ad ampiezza costante, i vettori N e C sono funzioni periodiche del tempo. In particolare, il modulo di N varia nel tempo, mantenendo fissa la propria direzione (cioè coincidente con quella del vettore \mathbf{w}): tale modulo può pertanto essere descritto dal suo valore algebrico, vale a dire:

$$N(t) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w} \quad (2.6)$$

Inoltre, se la sollecitazione agente sull'elemento strutturale è periodica di periodo T , anche $N(t)$ è uno scalare periodico di medesimo periodo, perciò l'ampiezza e il valore medio di tale vettore possono essere facilmente calcolati mediante le seguenti espressioni:

$$N_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) - \min_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) \right\} \quad (2.7)$$

$$N_m = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) + \min_{t \in T} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{w}) \right\} \quad (2.8)$$

Il valore massimo della componente normale di tensione agente sul piano critico si ottiene sommando ampiezza e valore medio:

$$N_{\max} = N_a + N_m \quad (2.9)$$

La definizione dell'ampiezza e del valore medio della componente tangenziale C relativa al piano critico non è immediata poiché C varia nel tempo, non solo in modulo ma anche in direzione. In particolare, durante la storia di carico il vertice

del vettore C descrive sul piano critico una curva chiusa Σ , come riportato in *Figura 2.7*.

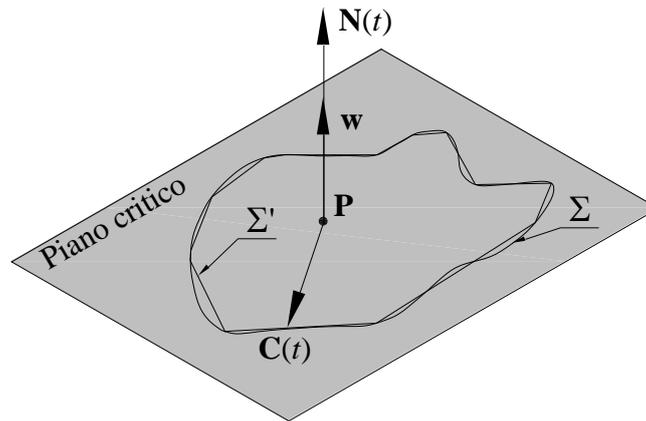


Figura 2.7 Tensione normale e tangenziale sul piano critico di normale w e percorso descritto dal vettore C in un ciclo di carico.

L'equazione in forma chiusa di Σ può essere determinata solo per alcuni casi di storie di carico particolarmente semplici, mentre per storie di carico più complesse è necessario approssimare la curva Σ mediante una poligonale Σ' , a lati rettilinei e avente n vertici. In *Figura 2.7* si può osservare come la poligonale approssimi in modo tanto più corretto la curva Σ , quanto maggiore è il numero n dei punti utilizzati per descrivere Σ' , cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma' = \Sigma$.

Al fine di determinare l'ampiezza e il valore medio della componente tangenziale C sul piano critico, Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2001; Carpinteri, 2011) ricorrono al metodo della più piccola circonferenza che circoscrive Σ , noto come Minimum Bounding Circle (MBC) method (Papadopoulos, 1998).

In particolare, secondo Papadopoulos l'ampiezza C_a della componente di tensione tangenziale agente sul piano critico è pari al raggio della più piccola circonferenza che contiene interamente la curva Σ , mentre il valore medio C_m di tale componente è pari alla distanza del centro di tale circonferenza dall'origine del sistema di riferimento. Sfruttando il teorema di Karatheodory, Papadopoulos ha dimostrato che per un poligono con n vertici, è sempre possibile definire la più

piccola circonferenza che contiene Σ' ed essa è unica (Papadopoulos, 1987). Matematicamente il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$C_m = \min_{C'} \left\{ \max_{t \in T} \|C(t) - C'\| \right\} \quad (2.10)$$

L'interpretazione geometrica di questo problema è mostrata in *Figura 2.8*. Scelto un punto ad arbitrio sul piano critico, si individua il vettore C' e si disegna una circonferenza di centro nel punto di applicazione di C' che circoscrive la curva Σ . Il raggio della circonferenza così costruita è pari a:

$$\max_{t \in T} \|C(t) - C'\| \quad (2.11)$$

Quindi, cambiando la posizione della circonferenza e procedendo in modo iterativo, si individua la circonferenza che circoscrive la curva Σ , di raggio minore rispetto a quello del passo precedente. L'ampiezza C_a della tensione tangenziale è data dalla seguente espressione:

$$C_a = \max_{t \in T} \|C(t) - C_m\| \quad (2.12)$$

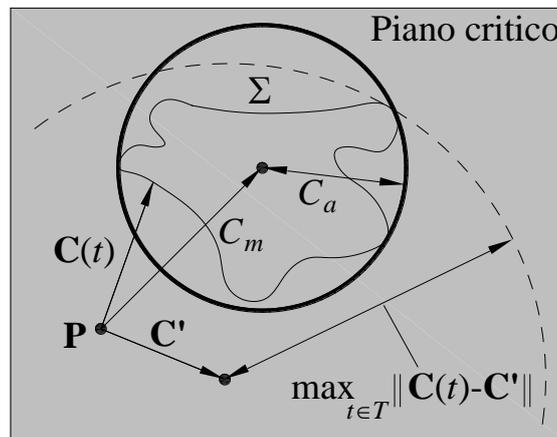


Figura 2.8 Rappresentazione grafica della determinazione dell'ampiezza C_a e del valore medio C_m mediante il metodo MBC (Papadopoulos, 1998).

Il metodo proposto da Papadopoulos richiede un elevato numero di iterazioni, specialmente nel caso di storie di carico complesse (ad esempio per carichi asincroni). Nel 2002, Bernasconi ha sviluppato un algoritmo in grado di calcolare rapidamente il valore di C_a (Bernasconi, 2002). In particolare, l'algoritmo proposto si avvale di una procedura di ottimizzazione numerica, generalmente disponibile nei software commerciali di calcolo, e che consente di individuare direttamente il centro della più piccola circonferenza che circonda la curva Σ .

2.2.4 Valutazione della resistenza a fatica

La valutazione della resistenza a fatica in presenza di carichi multiassiali ciclici e alto numero di cicli prevede di combinare non linearmente l'ampiezza di una tensione normale equivalente, $N_{a,eq}$, e l'ampiezza della tensione tangenziale, C_a , relative al piano critico:

$$\left(\frac{N_{a,eq}}{\sigma_{af,-1}} \right)^2 + \left(\frac{C_a}{\tau_{af,-1}} \right)^2 = 1 \quad (2.13)$$

dove (Carpinteri, 2011; Carpinteri, 2013a):

$$N_{a,eq} = N_a + \sigma_{af,-1} \left(\frac{N_m}{\sigma_u} \right) \quad (2.14)$$

essendo σ_u la resistenza ultima a trazione del materiale.

Tale relazione rappresenta la condizione di limite di fatica in regime multiassiale e tiene conto di alcuni risultati ottenuti da prove sperimentali, infatti:

(i) una tensione normale media di trazione contribuisce all'apertura della fessura e accelera il danneggiamento a fatica del materiale, mentre una tensione normale di compressione riduce la propagazione della fessura ad opera dell'attrito che si genera tra le due superfici della fessura stessa. L'Eq. (2.14) è stata proposta da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2011) sulla base della relazione di Goodman (Goodman, 1899) riscritta in funzione della componente normale di tensione agente sul piano critico come segue:

$$\frac{N_a}{\sigma_{af,-1}} + \frac{N_m}{\sigma_u} = 1 \quad \text{per } N_m \geq 0; \quad (2.15)$$

(ii) una tensione tangenziale media, sovrapposta ad una tensione tangenziale alterna, non influenza sensibilmente la vita a fatica del componente strutturale metallico (Gough, 1951);

(iii) in accordo con i risultati sperimentali di Froustey e collaboratori (Froustey, 1989; Froustey, 1992) e la teoria di Papadopoulos (Papadopoulos, 1994), la differenza di fase fra sollecitazioni alterne non influenza la vita a fatica del componente strutturale, specialmente in presenza di metalli duri.

Al fine di procedere alla valutazione della resistenza a fatica multiassiale in modo del tutto analogo a quanto avviene in regime monoassiale, si definisce, a partire dall'Eq. (2.13), una tensione equivalente di ampiezza $\sigma_{a,eq}$, poi confrontata con il limite di fatica per tensione normale alterna, $\sigma_{af,-1}$:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{N_{a,eq}^2 + \left(\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}} \right)^2 C_a^2} = \sigma_{af,-1} \quad (2.16)$$

Per eseguire la valutazione della resistenza a fatica per vita finita, in luogo dei limiti a fatica $\sigma_{af,-1}$ e $\tau_{af,-1}$ dell'Eq. (2.16) vengono considerate delle resistenze a fatica. In particolare, ricorrendo alle espressioni di Basquin (Basquin, 1910) sia per sforzo normale alterno ($\sigma'_{af,-1} = \sigma_{af,-1} (N_f / N_0)^m$, essendo $\sigma'_{af,-1}$ la resistenza a fatica per tensione normale alterna per vita finita, N_f) che per sforzo tangenziale alterno ($\tau'_{af,-1} = \tau_{af,-1} (N_f / N_0)^{m^*}$, essendo $\tau'_{af,-1}$ la resistenza a fatica per tensione tangenziale alterna per vita finita, N_f), l'Eq. (2.16) può essere riscritta come segue:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{(N'_{a,eq})^2 + \left(\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}} \right)^2 \left(\frac{N_f}{N_0} \right)^{2m} \left(\frac{N_0}{N_f} \right)^{2m^*} C_a^2} = \sigma_{af,-1} \left(\frac{N_f}{N_0} \right)^m \quad (2.17)$$

dove:

$$- N'_{a,eq} = N_a + \sigma_{af,-1} \left(\frac{N_f}{N_0} \right)^m \left(\frac{N_m}{\sigma_u} \right);$$

- N_0 = numero di cicli di carico di riferimento (di norma $N_0 = 2 \cdot 10^6$);

- m = pendenza della curva $S - N$ per tensione normale alterna;

- m^* = pendenza della curva $S - N$ per tensione tangenziale alterna.

Il numero di cicli a rottura, N_f , può essere determinato risolvendo l'Eq. (2.17) con una procedura iterativa.

2.3 L'effetto della scelta della giacitura del piano critico

Nel presente Paragrafo vengono analizzati i fondamenti teorici e alcuni esempi applicativi relativamente all'influenza della scelta della giacitura del piano critico nella valutazione della resistenza a fatica condotta secondo il criterio discusso al Paragrafo precedente.

2.3.1 Definizione della giacitura del piano critico

I criteri basati sull'approccio del piano critico e formulati in termini di tensioni si distinguono essenzialmente per la strategia impiegata per determinare la giacitura del piano critico.

In particolare, alcuni ricercatori definiscono il piano critico come il piano materiale dove alcune componenti di tensione o una loro combinazione raggiunge il massimo valore. Ad esempio, nel 1959 Findley ha proposto di assumere la giacitura del piano critico coincidente con quella del piano dove la combinazione lineare della tensione normale e della tensione tangenziale agenti sul piano critico, raggiunge il valore massimo (Findley, 1959). Secondo i criteri proposti inizialmente da Matake (Matake, 1977) e McDiarmid (McDiarmid, 1987; McDiarmid, 1991) e recentemente da Susmel e collaboratori (Susmel, 2002), Kluger e collaboratori (Kluger, 2015) e Wang e collaboratori (Wang, 2015), il piano critico viene assunto coincidere con quello che sperimenta la massima tensione tangenziale; poiché la massima tensione tangenziale si registra in due piani tra loro ortogonali, Matake (Matake, 1977) ha considerato tra i due possibili piani critici quello in corrispondenza del quale il valore della tensione normale è

maggiore. Dietmann e collaboratori (Dietmann, 1976) ricorrendo, invece, alla definizione di tensione tangenziale ottaedrale, hanno definito il piano critico come il piano in corrispondenza del quale tale tensione raggiunge il valore massimo. La giacitura del piano critico può essere anche definita assumendo quale direzione normale a tale piano quella che sperimenta il massimo valore della varianza della tensione tangenziale, noto come metodo Shear-Stress-Maximum Variance, e recentemente proposto da Susmel e collaboratori (Susmel, 2014).

Alternativamente, la giacitura del piano critico può essere dedotta impiegando una funzione peso (Macha, 1989; Carpinteri, 2000; Carpinteri, 2002). Tale procedimento si basa sulla ricerca delle direzioni medie principali di tensione, mediate impiegando un'opportuna funzione peso, che tiene conto dei principali fattori che influenzano il comportamento a fatica dei materiali metallici.

Le procedure sopra riportate rappresentano solo alcune di quelle disponibili in letteratura (Karolczuk, 2005); un confronto tra alcuni metodi per la determinazione della giacitura del piano critico è stato recentemente condotto da Marciniak e collaboratori (Marciniak, 2014).

Il criterio per alto numero di cicli discusso nel presente Capitolo impiega le direzioni medie principali di tensione per individuare la giacitura del piano critico (Carpinteri, 2002; Carpinteri, 2011). In particolare, la giacitura del piano critico, presentata in dettaglio al Paragrafo 2.2.2, risulta correlata alle direzioni medie principali di tensione mediante l'angolo δ (Eq. (2.3)).

Nel 2014 Łagoda e collaboratori hanno considerato differenti formulazioni per la valutazione dell'angolo δ che definisce la giacitura del piano critico (Łagoda, 2014). In particolare, gli autori hanno proposto espressioni alternative per tale angolo rispetto all'espressione originale δ (definita nel seguito δ_1), ma formalmente simili, vale a dire funzioni di due parametri propri del materiale, quali il limite di fatica per tensione normale alterna, $\sigma_{af,-1}$, e quello per tensione tangenziale alterna, $\tau_{af,-1}$. Le relazioni riportate in (Łagoda, 2014) risultano:

$$\delta_2 = \frac{9}{8} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right)^4 \right] 45^\circ \quad (2.18)$$

$$\delta_3 = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right)^3 \right] 45^\circ \quad (2.19)$$

$$\delta_4 = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-3} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right) \right] 45^\circ \quad (2.20)$$

$$\delta_5 = \frac{3}{(\sqrt{3}-1)^2} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right) \right]^2 45^\circ \quad (2.21)$$

Le curve riportate in *Figura 2.9* rappresentano graficamente sia l'Eq. (2.3) sia le Eq. (2.18)-(2.21), dove δ è plottato in funzione del rapporto tra i limiti di fatica, $\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1}$. In particolare, è possibile osservare che per metalli alla soglia tra dolci-duri (cioè per $\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \rightarrow 0.58$), il valore dell'angolo δ calcolato utilizzando le differenti equazioni è essenzialmente il medesimo. Al contrario, nel caso di un metallo duro, caratterizzato ad esempio da $\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} = 0.7$, la differenza massima tra i valori di δ è pari a 17° .

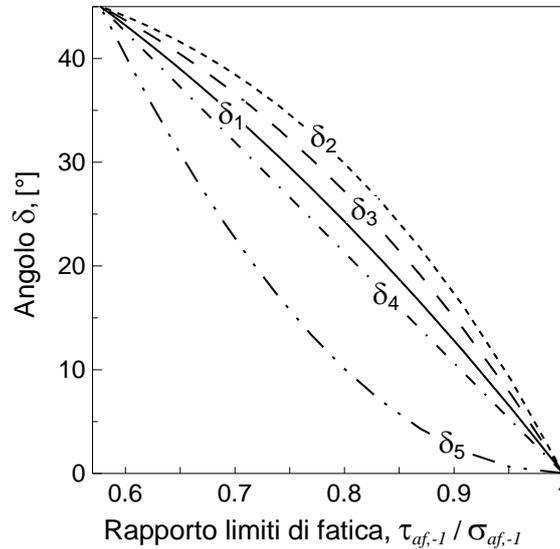


Figura 2.9 Andamento del valore di δ in funzione del rapporto $\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1}$, ottenuto applicando alternativamente le Eq. (2.3) e Eq. (2.18)-(2.21).

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dall'implementare all'interno del criterio, oggetto del presente Capitolo, le espressioni proposte da Łagoda e collaboratori. Pertanto, le espressioni di δ vengono inserite nell'algoritmo originale, scritto in linguaggio *Fortran* (Carpinteri, 2015; Ronchei 2015), al fine di esaminare se tali espressioni risultano in grado di migliorare la precisione del criterio nell'ambito della stima della vita a fatica.

2.3.2 Validazione dell'implementazione proposta

La validazione dell'implementazione proposta viene eseguita considerando alcuni dati sperimentali disponibili in letteratura, relativi a prove di fatica biassiali eseguite in controllo di carico (Lee, 1985; Sanetra, 1991; Łagoda, 1994; Kurek, 2014; Niesłony, 2014; Krzysztof, 2014).

I materiali utilizzati nelle prove sperimentali di cui sopra risultano leghe di acciaio e di alluminio, comunemente impiegate per la realizzazione di componenti strutturali (quali ad esempio le parti portanti di autocarri, automobili, gru, navi). In particolare, i dati sperimentali analizzati sono relativi a provini cilindrici realizzati in: acciaio SM45C (Lee, 1985), 30CrNiMo8 (Sanetra, 1991; Łagoda, 1994); lega di alluminio 6082-T6 (Kurek, 2014; Niesłony, 2014) e lega di acciaio S355J0 (Krzysztof, 2014). Tale scelta è stata condotta allo scopo di validare la nuova formulazione relativamente a materiali caratterizzati da differenti valori del rapporto tra i limiti di fatica, e più precisamente:

(i) per l'acciaio SM45C e l'acciaio 30CrNiMo8, il rapporto tra i limiti di fatica è tipico dei metalli estremamente duri;

(ii) per la lega di alluminio 6082-T6, il rapporto tra i limiti di fatica è tipico dei metalli alla soglia dolci-duri;

(iii) per la lega di acciaio S355J0, il rapporto tra i limiti di fatica è tipico dei metalli duri.

Tutti i provini analizzati sono soggetti a carichi sinusoidali, sincroni, in fase e non, e lo stato tensionale applicato risulta:

$$\sigma_x = \sigma_{x,a} \sin(\omega_x t) + \sigma_{x,m} \quad (2.22a)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,a} \sin(\omega_{xy} t - \beta) + \tau_{xy,m} \quad (2.22b)$$

Le proprietà meccaniche e a fatica dei materiali esaminati sono riportate in *Tabella 2.1*.

I dettagli relativi alle condizioni di carico analizzate sono riportati in *Tabella 2.2*, dove $N_{f,exp}$ indica il numero di cicli di carico sperimentale a rottura.

Tabella 2.1 Proprietà meccaniche e a fatica dei materiali analizzati.

Materiale	σ_u [MPa]	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	m [-]	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	m^* [-]
Acciaio SM45C (Lee, 1985)	731	254.25	-0.10	209.41	-0.05
Acciaio 30CrNiMo8 (Sanetra, 1991; Lagoda, 1994)	1014	427.37	-0.13	371.52	-0.04
Lega di alluminio 6082-T6 (Kurek, 2014; Nieslony, 2014)	290	152.83	-0.11	87.90	-0.15
Lega di acciaio S355J0 (Krzysztof, 2014)	611	276.58	-0.15	183.70	-0.09

Tabella 2.2 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	β [°]	$\tau_{xy,a}/\sigma_{x,a}$ [-]	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\sigma_{x,m}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [%]	$\tau_{xy,m}$ [%]	$N_{f,exp}$ [cicli]
Acciaio SM45C	1	0	0.25	372.0	0.0	93.0	0.0	38000
	2	0	0.39	390.0	0.0	151.0	0.0	8500
	3	0	0.42	349.0	0.0	148.0	0.0	24000
	4	0	0.43	309.0	0.0	134.0	0.0	100000
	5	0	0.47	325.0	0.0	153.0	0.0	32000
	6	90	0.19	417.0	0.0	78.0	0.0	13000
	7	90	0.30	392.0	0.0	118.0	0.0	12400
	8	90	0.40	314.0	0.0	127.0	0.0	100000
	9	90	0.50	265.0	0.0	132.0	0.0	350000
	10	90	0.50	286.0	0.0	143.0	0.0	120000
	11	90	0.50	304.0	0.0	152.0	0.0	57000
	12	90	0.50	346.0	0.0	173.0	0.0	16000
	13	90	0.61	304.0	0.0	186.0	0.0	26000
	14	90	0.85	265.0	0.0	225.0	0.0	12000
	15	90	0.86	245.0	0.0	211.0	0.0	25000
	16	90	0.88	245.0	0.0	216.0	0.0	20000
	17	90	1.26	167.0	0.0	211.0	0.0	290000
Acciaio 30CrNiMo8	18	0	0.50	440.0	0.0	220.0	0.0	2115690
	19	0	0.50	444.0	0.0	222.0	0.0	2119270
	20	0	0.50	456.0	0.0	228.0	0.0	254087
	21	0	0.50	466.0	0.0	233.0	0.0	464280
	22	0	0.50	478.0	0.0	239.0	0.0	409010
	23	0	0.50	500.0	0.0	250.0	0.0	113630
	24	0	0.50	532.0	0.0	265.0	0.0	86925
	25	0	0.50	575.0	0.0	287.0	0.0	43566

	26	0	0.24	147.0	0.0	36.0	0.0	8614100
	27	0	0.24	156.0	0.0	38.0	0.0	1000200
	28	0	0.24	160.0	0.0	39.0	0.0	1801950
	29	0	0.24	169.0	0.0	41.0	0.0	527900
	30	0	0.24	170.0	0.0	41.0	0.0	490100
	31	0	0.24	176.0	0.0	43.0	0.0	210300
	32	0	0.24	182.0	0.0	44.0	0.0	214300
	33	0	0.24	186.0	0.0	45.0	0.0	319500
	34	0	0.24	190.0	0.0	46.0	0.0	381500
	35	0	0.24	199.0	0.0	48.0	0.0	115900
	36	0	0.24	201.0	0.0	49.0	0.0	177400
	37	0	0.25	146.0	0.0	36.0	0.0	4642200
	38	0	0.25	150.0	0.0	37.0	0.0	998900
	39	0	0.25	158.0	0.0	39.0	0.0	431900
	40	0	0.25	170.0	0.0	42.0	0.0	1311100
	41	0	0.50	104.0	0.0	52.0	0.0	3187700
	42	0	0.50	119.0	0.0	59.0	0.0	659000
	43	0	0.50	122.0	0.0	61.0	0.0	5290800
	44	0	0.50	128.0	0.0	64.0	0.0	670700
Lega di	45	0	0.50	133.0	0.0	67.0	0.0	422200
alluminio	46	0	0.50	138.0	0.0	69.0	0.0	537100
6082-T6	47	0	0.50	140.0	0.0	70.0	0.0	642600
	48	0	0.50	141.0	0.0	71.0	0.0	546900
	49	0	0.50	153.0	0.0	76.0	0.0	364300
	50	0	0.50	155.0	0.0	77.0	0.0	226200
	51	0	1.02	83.0	0.0	85.0	0.0	3017300
	52	0	1.02	86.0	0.0	88.0	0.0	1473000
	53	0	1.02	87.0	0.0	89.0	0.0	1324000
	54	0	1.02	94.0	0.0	96.0	0.0	354400
	55	0	1.02	96.0	0.0	98.0	0.0	840500
	56	0	1.02	98.0	0.0	100.0	0.0	782300
	57	0	1.02	129.0	0.0	132.0	0.0	159200
	58	0	1.03	58.0	0.0	60.0	0.0	9253400
	59	0	1.03	72.0	0.0	74.0	0.0	7568900
	60	0	1.03	73.0	0.0	75.0	0.0	1661100
	61	0	1.03	75.0	0.0	77.0	0.0	4399700
	62	0	1.03	76.0	0.0	78.0	0.0	3059900
	63	0	1.03	78.0	0.0	80.0	0.0	3997700
	64	0	1.03	88.0	0.0	91.0	0.0	949600
	65	0	1.03	116.0	0.0	119.0	0.0	365100
	66	0	1.03	130.0	0.0	134.0	0.0	93600
	67	0	1.04	84.0	0.0	87.0	0.0	1173800
Lega di	68	0	1.00	167.0	0.0	167.0	0.0	1615333
acciaio	69	0	1.00	183.0	0.0	183.0	0.0	658333
S355J0	70	0	1.00	200.0	0.0	200.0	0.0	194333

I valori dei limiti di fatica $\sigma_{af,-1}$ e $\tau_{af,-1}$ e delle pendenze m e m^* (riportati in Tab. 2.1) sono stati ricavati dalle rispettive curve $S - N$, costruite impiegando i

risultati disponibili in letteratura, relativi a prove di flessione pura e torsione pura. Tali valori si riferiscono ad un numero di cicli di carico pari a $2 \cdot 10^6$ cicli.

I confronti in termini di vita a fatica tra i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, e i risultati teorici, $N_{f,cal}$, vengono riportati nelle *Figure 2.10-2.13* considerando, per ciascun materiale analizzato, differenti espressioni dell'angolo δ per definire la giacitura del piano critico. Si osserva un buon accordo tra i dati sperimentali e i risultati numerici, poiché i risultati ottenuti risultano generalmente contenuti nella banda di dispersione 3 (cioè $N_{f,cal}/N_{f,exp}$ è compreso tra 0.33 e 3), indipendentemente dal grado di non proporzionalità e dall'espressione di δ adottata.

La precisione del criterio nell'ambito della stima della vita a fatica può essere valutata impiegando il metodo dell'errore dello scarto quadratico medio (Łagoda, 2014). In particolare, il valore dell'errore dello scarto quadratico medio logaritmico è calcolato come segue:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \log^2(N_{f,exp}/N_{f,cal})}{n}} \quad (2.23)$$

dove n è il numero totale dei dati analizzati e $N_{f,cal}$ è la vita a fatica multiassiale teorica, determinata considerando le differenti espressioni di δ (Eq. (2.3) e Eq. (2.18)-(2.21)). Infine, l'errore quadratico medio è dato da: $T_{RMS} = 10^{E_{RMS}}$.

In *Figura 2.14* viene riportato il valore dell'errore quadratico medio valutato per le cinque espressioni di δ per ciascun materiale esaminato. In particolare, dall'analisi dei risultati emerge che:

(i) per l'acciaio SM45C, risultati maggiormente precisi si hanno impiegando $\delta = \delta_5$. In particolare, in tal caso, il valore di T_{RMS} diminuisce significativamente (di circa il 32%) rispetto a quello relativo all'impiego di $\delta = \delta_1$;

(ii) per l'acciaio 30CrNiMo8, risultati maggiormente precisi si hanno impiegando $\delta = \delta_5$. In particolare, in tal caso, il valore di T_{RMS} diminuisce (di circa il 3%) rispetto a quello relativo all'impiego di $\delta = \delta_1$;

(iii) per la lega di alluminio 6082-T6, risultati ugualmente precisi si hanno impiegando le differenti espressioni di δ , poiché il valore dell'angolo δ è essenzialmente il medesimo;

(iv) per la lega di acciaio S355J0, risultati maggiormente precisi si hanno impiegando $\delta = \delta_5$. In particolare, in tal caso, il valore di T_{RMS} diminuisce (di circa il 15%) rispetto a quello relativo all'impiego di $\delta = \delta_1$.

In conclusione, è possibile evidenziare che l'efficacia dell'implementazione delle relazioni proposte da Łagoda e collaboratori (Łagoda, 2014) nel criterio per alto numero di cicli può essere osservata solamente per metalli duri ed estremamente duri. Più precisamente, per l'acciaio SM45C, l'acciaio 30CrNiMo8 e la lega di acciaio S355J0, un livello di precisione maggiore in termini di vita a fatica viene ottenuto quando la giacitura del piano critico è valutata impiegando δ_5 invece che δ_1 .

Con riferimento ai materiali di cui sopra, la giacitura del piano critico calcolata impiegando δ_5 tende ad avvicinarsi maggiormente alla giacitura del piano di frattura rispetto a quella determinata impiegando δ_1 (essendo δ_5 minore di δ_1). Tale osservazione è coerente con le evidenze sperimentali (si veda Paragrafo 2.2.2), poiché per metalli duri ed estremamente duri (come l'acciaio SM45C, l'acciaio 30CrNiMo8 e la lega di acciaio S355J0), lo Stage 2 è predominante rispetto allo Stage 1 e quindi il piano critico tende a coincidere con il piano finale di frattura.

Ulteriori analisi sono necessarie per verificare se tale tendenza può essere osservata anche per altri materiali metallici.

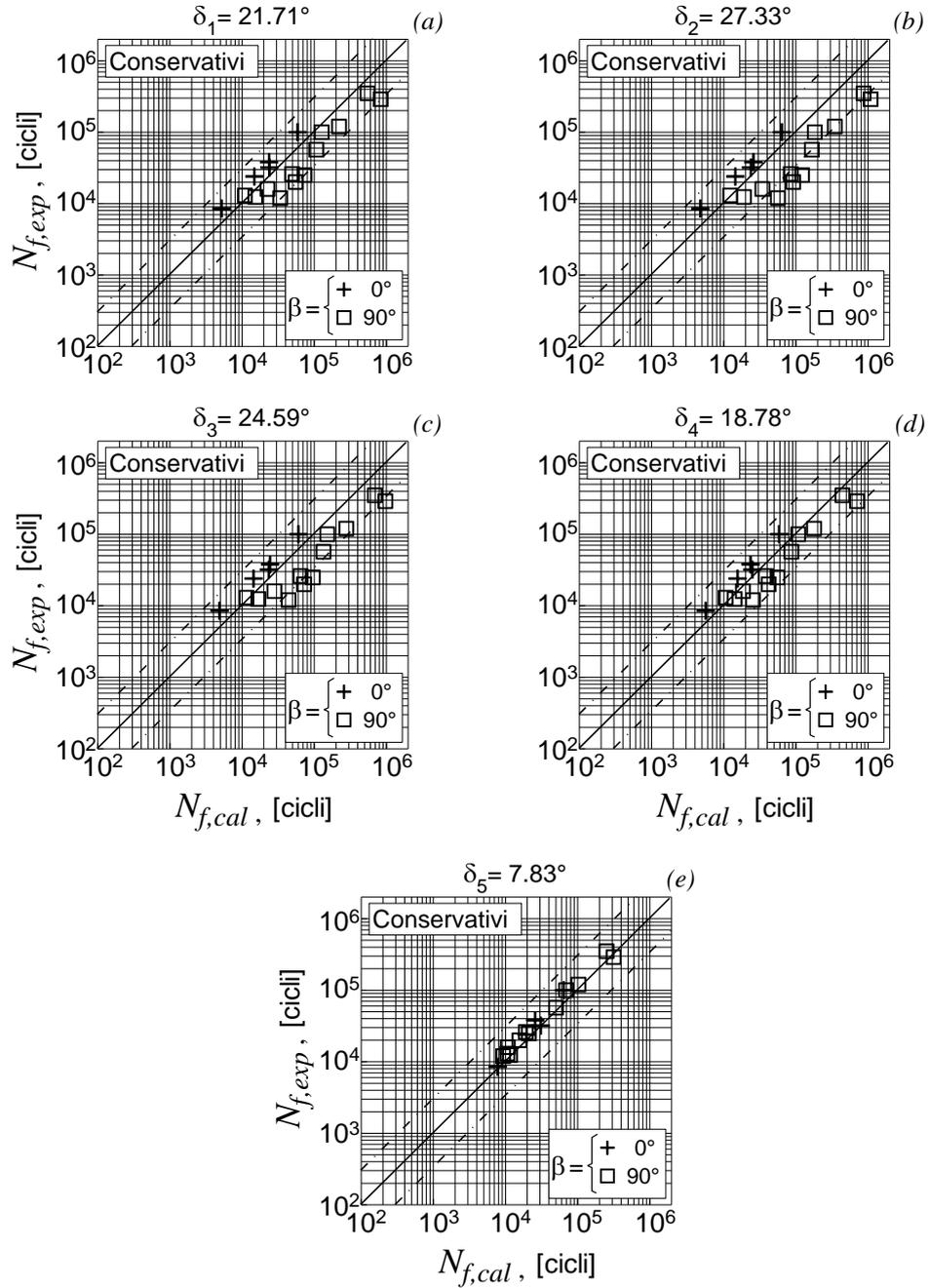


Figura 2.10 Acciaio SM45C: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, al variare dell'espressione dell'angolo δ impiegata.

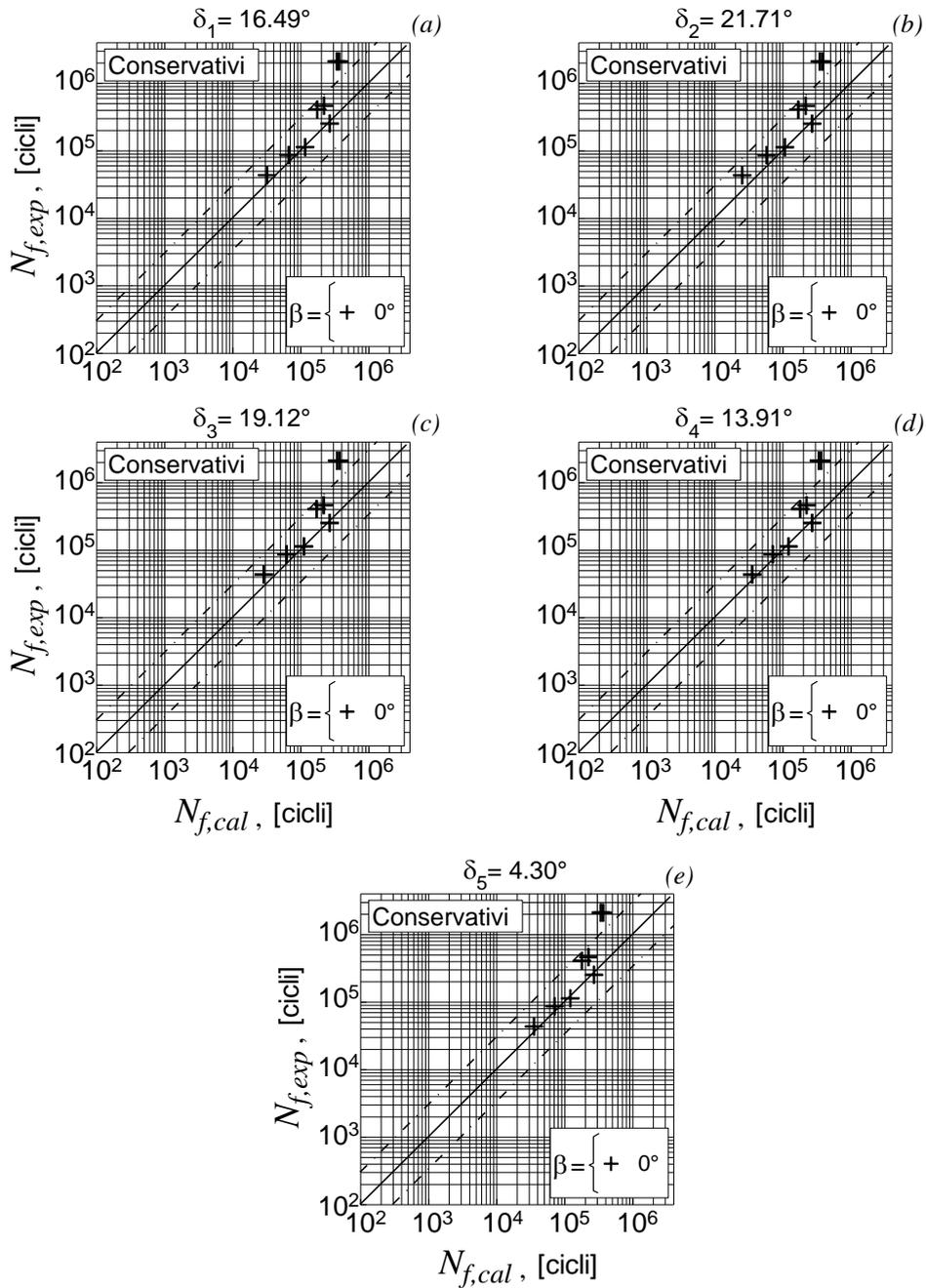


Figura 2.11 Acciaio 30CrNiMo8: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, al variare dell'espressione dell'angolo δ impiegata.

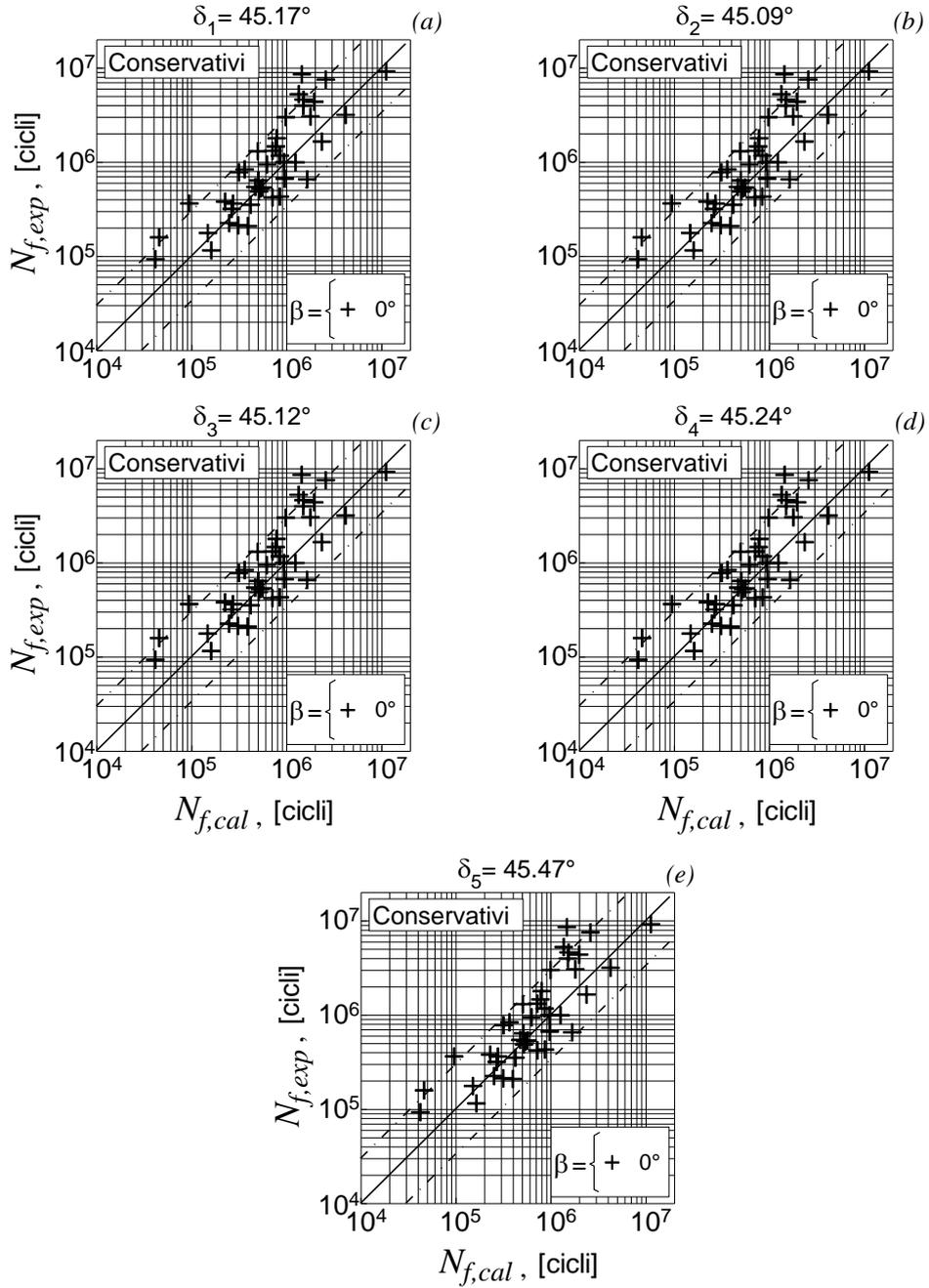


Figura 2.12 Lega di alluminio 6082-T6: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, al variare dell'espressione dell'angolo δ impiegata.

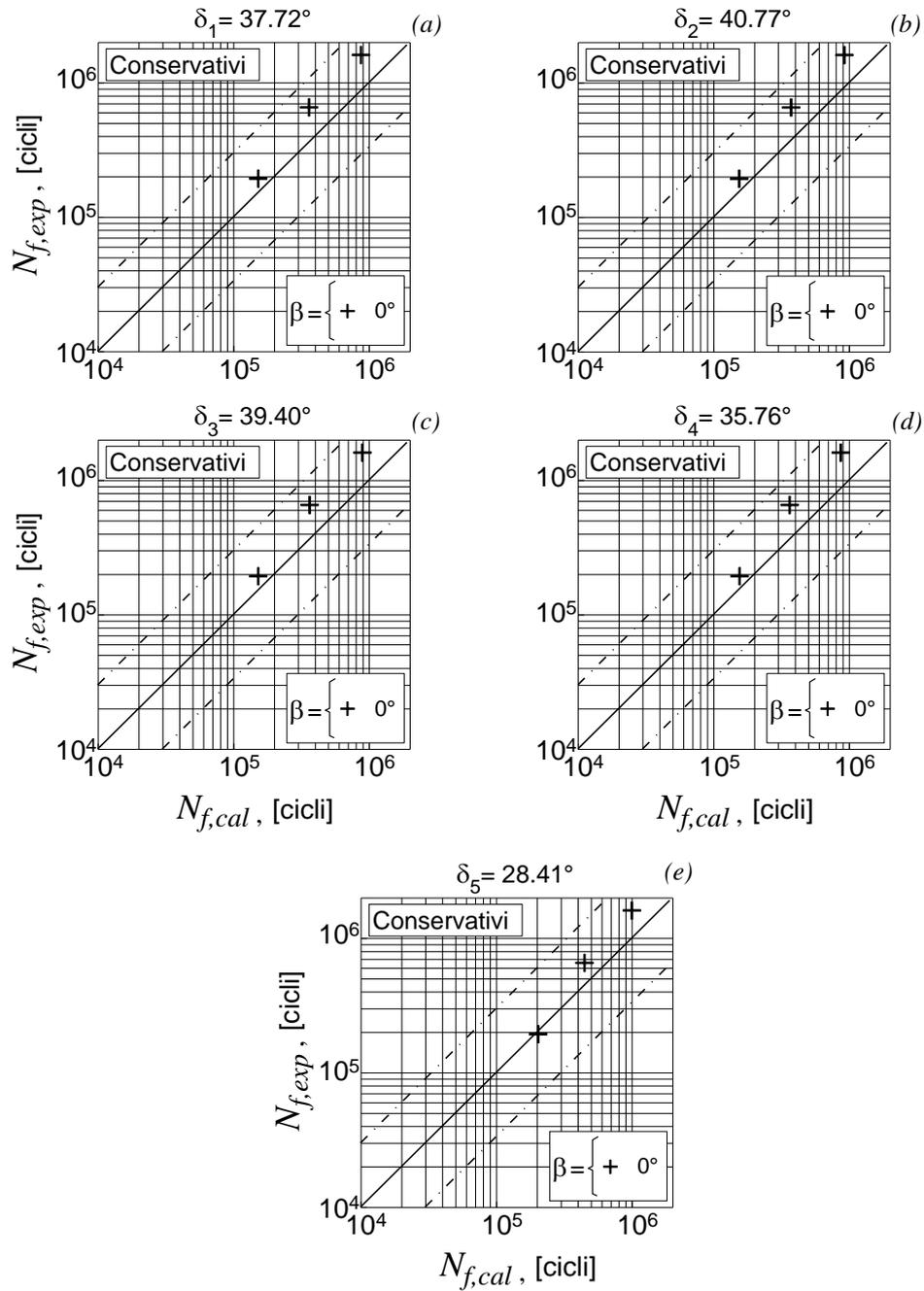
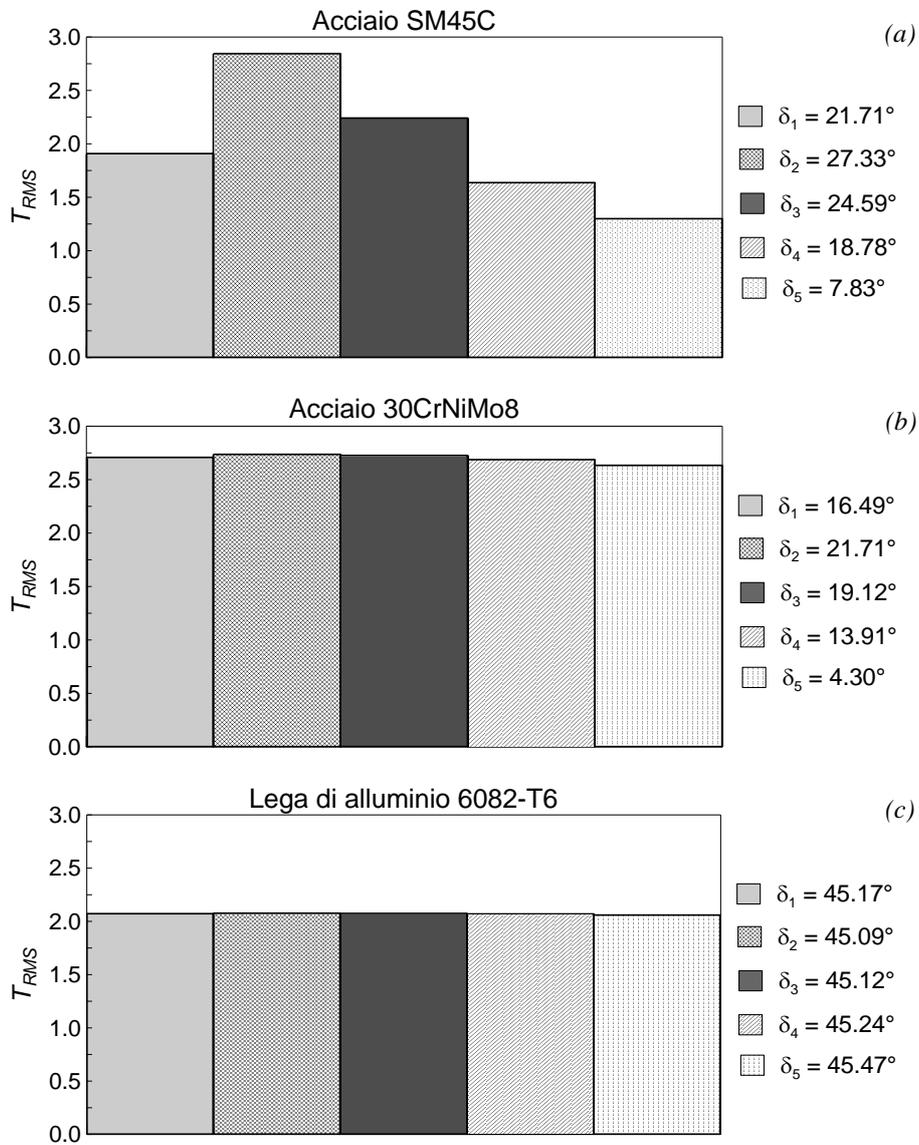


Figura 2.13 Lega di acciaio S355J0: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, al variare dell'espressione dell'angolo δ impiegata.



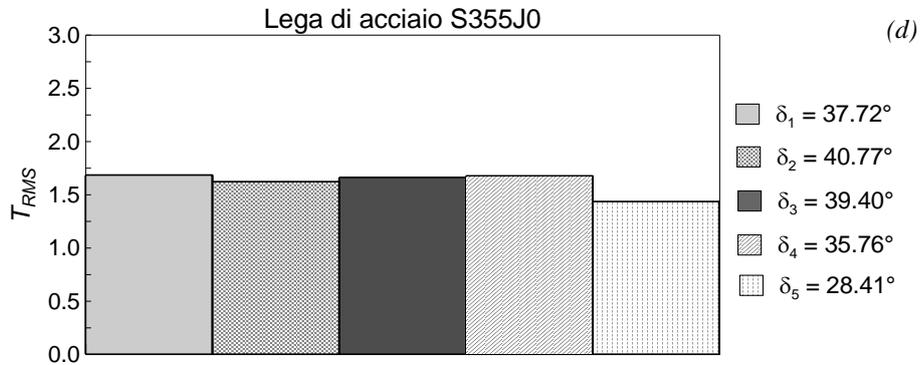


Figura 2.14 Errore quadratico medio T_{RMS} al variare dell'espressione dell'angolo δ impiegata per: acciaio SM45C (a); acciaio 30CrNiMo8 (b); lega di alluminio 6082-T6 (c); lega di acciaio S355J0 (d). I valori dell'angolo δ , calcolati secondo l'Eq. (2.3) e le Eq.(2.18)-(2.21), sono riportati in legenda.

2.4 L'effetto del metodo scelto per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale sul piano critico

Nel presente Paragrafo si analizza l'effetto del metodo scelto per definire l'ampiezza della tensione tangenziale agente sul piano critico nell'ambito della valutazione della resistenza a fatica.

2.4.1 Definizione dell'ampiezza della tensione tangenziale

Al fine di definire l'ampiezza della tensione tangenziale, C_a , è possibile impiegare diversi metodi disponibili in letteratura (Susmel, 2009).

Nella pratica progettuale, per ragioni di semplicità, si fa generalmente riferimento al metodo della corda, noto con il nome di Longest Chord (LC) method (Lemaitre, 1990) o al metodo della proiezione, noto con il nome Longest Projection (LP) method (Grubisic, 1976). In particolare, il metodo della corda, ampiamente discusso da Lemaitre e Chaboche, considera C_a connessa alla corda più lunga avente come estremi due punti appartenenti alla curva Σ (Lemaitre, 1990). Il valore di C_a è pari alla metà della lunghezza di tale corda; il valore medio della tensione tangenziale C_m è dato dal modulo del vettore che unisce l'origine del sistema di riferimento O e il punto medio della corda di massima lunghezza (Fig. 2.15(a)).

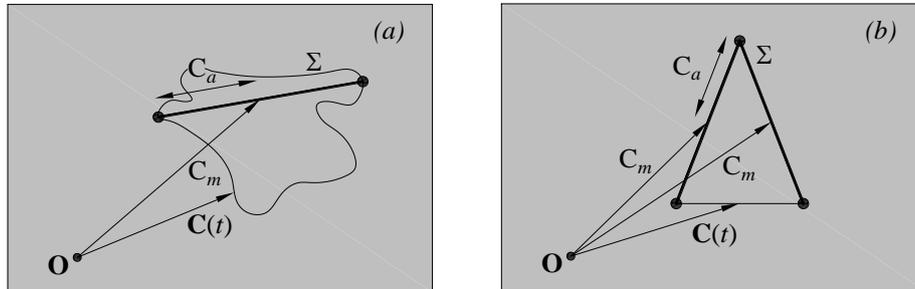


Figura 2.15 Definizione di C_a e C_m secondo il metodo LC.

È possibile osservare, però, che per alcune storie di carico esistono più corde tutte di lunghezza massima. In Figura 2.15(b) è mostrato un esempio: se la curva Σ tracciata dal vettore $\mathbf{C}(t)$ della tensione tangenziale è un triangolo isoscele, le corde di massima lunghezza sono due, e pertanto è impossibile definire in modo univoco il valore di C_m .

Il metodo della proiezione (LP), proposto da Grubisic, considera C_a connessa al segmento di lunghezza massima ottenuto dalla proiezione della curva Σ su di una retta passante per l'origine O del sistema di riferimento (Grubisic, 1976). Il valore dell'ampiezza C_a è pari alla metà della lunghezza di tale proiezione, mentre il valore medio C_m è dato dal modulo del vettore che unisce l'origine O e il punto medio della proiezione di massima lunghezza (Fig. 2.16(a)).

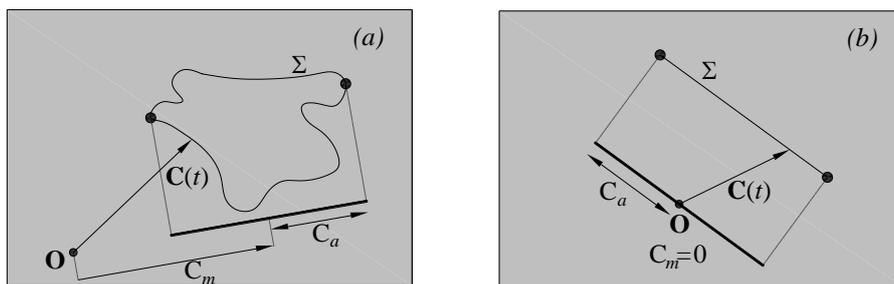


Figura 2.16 Definizione di C_a e C_m secondo il metodo LP.

Il metodo LP, così come quello LC, però è caratterizzato dal fatto che in alcuni casi non è possibile definire in modo univoco il valore medio C_m . Ad esempio, è possibile individuare un valore medio nullo, anche in presenza di percorsi delle tensioni tangenziali chiaramente caratterizzati da tensioni medie non nulle (Fig. 2.16(b)).

Al fine di superare le incongruenze associate ai due metodi di cui sopra, Papadopoulos (Papadopoulos, 1998) ha proposto il metodo della più piccola circonferenza, noto con il nome di Minimum Bounding Circle (MBC) method, già presentato in dettaglio al Paragrafo 2.2.3 (Fig. 2.17(a)).

Il maggior vantaggio del metodo MBC è quello di definire in modo univoco le quantità associate alla componente tangenziale di tensione agente sul piano critico, sebbene sia richiesto un elevato numero di iterazioni numeriche, gravose in termini computazionali.

Inoltre, come osservato da alcuni ricercatori (Susmel, 2009; Araújo, 2011), il metodo MBC non è sensibile alla reale forma della curva Σ . In particolare, differenti percorsi della tensione tangenziale possono essere circoscritti dalla medesima circonferenza, presentando così lo stesso valore di C_a e di C_m indipendentemente dalla complessità della storia di carico (Fig. 2.17(b)).

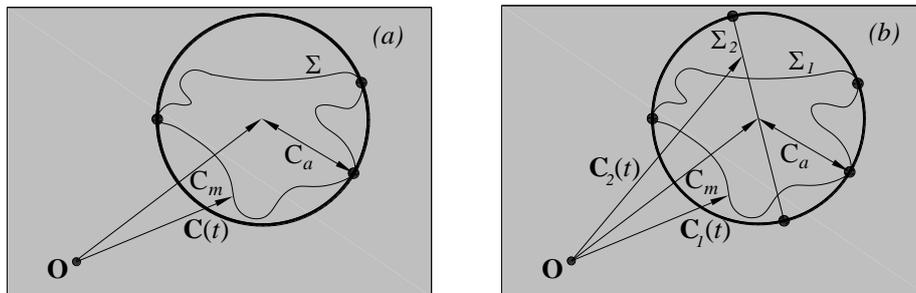


Figura 2.17 Definizione di C_a e C_m secondo il metodo MBC.

Inoltre, il metodo MCB impiega algoritmi che richiedono considerevoli tempi di calcolo per determinare il centro e il raggio della circonferenza che circoscrive il percorso Σ .

Il problema sopra evidenziato è in parte superato utilizzando un'ellisse anziché una circonferenza per definire l'ampiezza C_a della tensione tangenziale (Li, 2000; Li, 2001; Gonçalves, 2005; Zouain, 2006). In particolare, il metodo, proposto inizialmente da Li e collaboratori e noto con il nome di Minimum Circumscribed Ellipse (MCE) method (Li, 2000; Li, 2001), considera la più piccola ellisse che circonda la curva Σ sul piano critico. L'ampiezza della componente tangenziale di tensione C_a è calcolata come segue:

$$C_a = \sqrt{R_a^2 + R_b^2} \quad (2.24)$$

dove R_a e R_b sono i semiassi dell'MCE; il valore medio C_m è pari al modulo del vettore che unisce l'origine O del sistema di riferimento e il centro dell'ellisse (Fig. 2.18(a)).

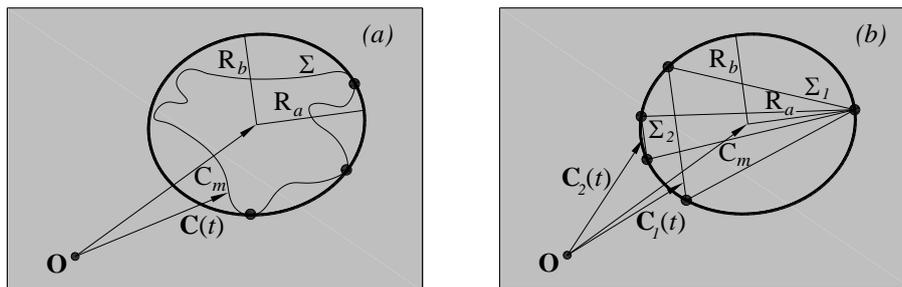


Figura 2.18 Definizione di C_a e C_m secondo il metodo MCE.

Al fine di definire i semiassi dell'ellisse, Li e collaboratori hanno proposto di costruire dapprima il MBC con raggio, R_a , e successivamente il MCE con semiasse maggiore, R_a , pari al raggio della circonferenza (Li, 2000; Li, 2001).

Secondo il metodo di cui sopra, per alcuni percorsi della tensione tangenziale (ad esempio i percorsi triangolari mostrati in Fig. 2.18(b)) è possibile individuare, per diverse curve Σ , il medesimo MCE (Gonçalves, 2005).

Al fine di superare tale ambiguità, Gonçalves e collaboratori hanno suggerito una soluzione analitica per determinare direttamente il più piccolo ellisse; tale semplice procedura può essere impiegata, però, solo in presenza di carichi multiassiali sinusoidali sincroni in fase e non (Gonçalves, 2005).

Un altro metodo per individuare in modo univoco il MCE è stata proposto da Zouain e collaboratori (Zouain, 2006); tale metodo calcola, mediante un complesso algoritmo, la più piccola ellisse attraverso la definizione della relativa norma di Frobenius.

Un metodo alternativo per la valutazione dell'ampiezza della tensione tangenziale, noto con il nome di Prismatic Hull (PH) method, è quello recentemente proposto da Araújo e collaboratori (Mamiya, 2002; Mamiya, 2009; Araújo, 2011). Più precisamente, si considera un punto materiale P , e sia \mathbf{X} il relativo tensore deviatorico degli sforzi, definito in un spazio da \mathfrak{R}^3 a \mathfrak{R}^3 , chiamato dev^3 (Mamiya, 2002; Mamiya, 2009). In dev^3 , il percorso delle tensioni di \mathbf{X} è descritto dall'insieme degli stati tensionali deviatorici, $\mathbf{X}(t)$, in modo tale che, considerando una base ortonormale \mathbf{B}_i (con $i = 1, \dots, 5$) di dev^3 , si ottiene:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^5 x_i(t) \mathbf{B}_i \quad (2.25)$$

Il percorso delle tensioni di \mathbf{X} può essere quindi descritto impiegando l'insieme delle componenti della tensione deviatorica:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)\}^T \quad (2.26)$$

che corrisponde, se riferito a una base ortonormale \mathbf{b}_i (con $i = 1, \dots, 5$) di \mathfrak{R}^5 , a una curva razionale del quinto ordine.

Considerando, ad esempio, la seguente base ortonormale di dev^3 (Mamiya, 2002; Mamiya, 2009):

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

le componenti della tensione deviatorica, $x_i(t)$, in \mathfrak{R}^5 sono espresse come segue:

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} X_x(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2\sigma_x(t) - \sigma_y(t) - \sigma_z(t)]$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_y(t) - X_z(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sigma_y(t) - \sigma_z(t)]$$

$$x_3(t) = \sqrt{2} X_{xy}(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t)$$

$$x_4(t) = \sqrt{2} X_{xz}(t) = \sqrt{2} \tau_{xz}(t)$$

$$x_5(t) = \sqrt{2} X_{yz}(t) = \sqrt{2} \tau_{yz}(t)$$

(2.28)

dove X_x , X_y , X_z , X_{xy} , X_{yz} , X_{xz} sono le componenti del tensore deviatorico degli sforzi, \mathbf{X} , e σ_x , σ_y , σ_z , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz} sono le componenti del tensore degli sforzi, $\boldsymbol{\sigma}$. È importante sottolineare che, ad ogni istante di tempo t , la norma Euclidea del tensore \mathbf{X} è uguale a quella del vettore \mathbf{x} (Mamiya, 2009).

La formulazione originale del metodo definisce l'ampiezza di una tensione tangenziale equivalente, τ_{eq} , considerando tutti i Prismatic Hull (PH) che contengono il percorso del vettore \mathbf{x} e che sono tangenti a tale percorso. Per un determinato PH, la metà della lunghezza di ciascun spigolo, a_i , può essere determinata attraverso la seguente relazione:

$$a_i = \frac{1}{2} \left[\max_{0 \leq t < T} x_i(t) - \min_{0 \leq t < T} x_i(t) \right] \quad (2.29)$$

Successivamente, considerando tutte le basi ortonormali di \mathfrak{R}^5 , si determina il PH che massimizza la seguente relazione:

$$\tau_{eq} = \max_{\Theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 [a_i(\Theta)]^2} \quad (2.30)$$

dove Θ è una quantità a quattro dimensioni utilizzata per identificare la base ortonormale \mathbf{b}_i , e:

$$a_i(\Theta) = \frac{1}{2} \left[\max_{0 \leq t < T} x_i(t, \Theta) - \min_{0 \leq t < T} x_i(t, \Theta) \right] \quad (2.31)$$

È necessario sottolineare che i PH possono avere una dimensione più piccola di cinque in funzione dello stato tensionale considerato. Ad esempio, quando lo stato tensionale è caratterizzato solamente dalle componenti di tensione σ_x , σ_y o σ_x , τ_{xy} , i PH degenerano in rettangoli (Araújo, 2011; Carpinteri, 2014a), mentre i PH degenerano in parallelepipedi quando le componenti di tensione diverse da zero sono σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Per il caso particolare di carichi ciclici sincroni, è stato dimostrato (Mamiya, 2002) che τ_{eq} (Eq. (2.30)) è costante rispetto Θ . Pertanto, qualsiasi base ortonormale di \mathfrak{R}^5 conduce allo stesso valore di τ_{eq} .

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dall'implementare all'interno del criterio, oggetto del presente Capitolo, il metodo proposto da Araújo e collaboratori. Più precisamente, ho implementato il metodo PH per calcolare l'ampiezza della componente tangenziale C , applicando l'Eq. (2.30) non alle componenti del vettore a cinque dimensioni \mathbf{x} , ma alle componenti del vettore bidimensionale C appartenente al piano critico (Carpinteri, 2013b; Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b). In tal caso, il PH degenera in un rettangolo, e la quantità a quattro dimensioni Θ degenera nella quantità scalare θ .

In particolare, considerando il sistema di riferimento $Puvw$ riportato in *Figura 2.6*, il vettore della tensione tangenziale \mathbf{C} relativo al piano critico può essere scomposto in due componenti secondo le direzioni \mathbf{u} e \mathbf{v} , rispettivamente (*Fig. 2.19*).

Si prendano ora in considerazione:

(i) i rettangoli che contengono il percorso Σ del vettore \mathbf{C} e che sono tangenti a tale percorso;

(ii) le basi di \mathcal{R}^2 , definite dai vettori unitari \mathbf{u} e \mathbf{v} , a loro volta identificati dall'angolo θ , angolo misurato rispetto ad una direzione fissa rispetto al tempo (si veda la linea tratteggiata in *Fig. 2.19*).

Le semilunghezze dei lati del rettangolo possono essere calcolate secondo l'*Eq. (2.31)* che, particolarizzata per il caso in esame risulta:

$$C_{u,a}(\theta) = \frac{1}{2} \left[\max_{0 \leq t < T} C_u(t, \theta) - \min_{0 \leq t < T} C_u(t, \theta) \right] \quad (2.32a)$$

$$C_{v,a}(\theta) = \frac{1}{2} \left[\max_{0 \leq t < T} C_v(t, \theta) - \min_{0 \leq t < T} C_v(t, \theta) \right] \quad (2.32b)$$

Infine, ricorrendo all'*Eq. (2.30)* è possibile definire l'ampiezza C_a del vettore della tensione tangenziale attraverso la seguente espressione:

$$C_a = \max_{0 \leq \theta < 90^\circ} \sqrt{[C_{u,a}(\theta)]^2 + [C_{v,a}(\theta)]^2} \quad (2.33)$$

dove tutte le basi di \mathcal{R}^2 vengono prese in considerazione poiché $0 \leq \theta < 90^\circ$.

Pertanto, le *Eq. (2.32)* e *(2.33)* vengono inserite nell'algoritmo originale, scritto in linguaggio *Fortran* (Carpinteri, 2013b; Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b), al fine di esaminare se il metodo PH risulta in grado di migliorare la precisione del criterio nell'ambito della stima della resistenza a fatica e ridurre l'onere computazionale.

È opportuno osservare che l'aspetto meccanico alla base di tale metodo è che non tutti gli stati della tensione $\mathbf{C}(t)$ appartenenti a Σ contribuiscono al danneggiamento a fatica. Infatti, è ragionevole supporre che solo le tensioni tangenziali sul contorno del PH siano in grado di influenzare il comportamento del

materiale nel contesto della resistenza a fatica per alto numero di cicli. Pertanto, il PH e le sue caratteristiche geometriche possono caratterizzare in modo appropriato la severità della sollecitazione tangenziale applicata al componente strutturale.

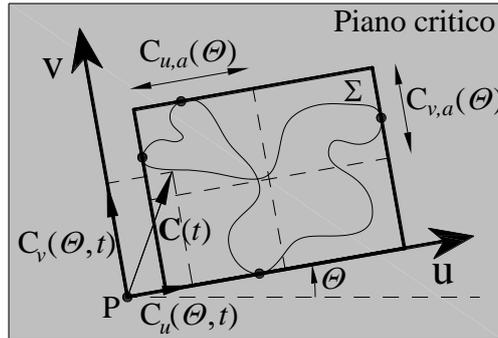


Figura 2.19 Rettangolo che contiene il percorso Σ della tensione tangenziale sul piano critico e identificato dall'angolo θ .

2.4.2 Validazione dell'implementazione proposta

Prima di procedere ad illustrare la validazione occorre fare la seguente premessa. Come introdotto sopra, il percorso Σ , descritto dal vettore della tensione tangenziale sul piano critico, assume forme differenti in funzione della condizione di carico in esame. In particolare, in un dato punto P del componente strutturale in esame (Fig. 2.1) soggetto a carichi ciclici sinusoidali, sincroni e asincroni, in fase e non, lo stato tensionale piano, caratterizzato da due tensioni normali biassiali e da una tensione tangenziale, può essere espresso come segue:

$$\sigma_x = \sigma_{x,a} \sin(\omega_x t) + \sigma_{x,m} \quad (2.34a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y,a} \sin(\omega_y t - \alpha) + \sigma_{y,m} \quad (2.34b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,a} \sin(\omega_{xy} t - \beta) + \tau_{xy,m} \quad (2.34c)$$

dove σ_x è la tensione normale longitudinale (assiale), σ_y è la tensione normale tangenziale (circonferenziale), e τ_{xy} è la tensione tangenziale.

Variando valori medi ($\sigma_{x,m}, \sigma_{y,m}, \tau_{xy,m}$), pulsazioni ($\omega_x, \omega_y, \omega_{xy}$) e fasi (α, β) dei segnali di cui sopra, il vettore della tensione tangenziale \mathbf{C} descrive sul piano critico percorsi chiusi, Σ , di forme differenti, e in particolare si possono verificare tre casi:

- (a) il percorso Σ è rappresentato da un segmento;
- (b) il percorso Σ è rappresentato da un'ellisse;
- (c) il percorso Σ è rappresentato da una curva chiusa di forma generica.

Nel caso (a), si possono individuare i seguenti sotto-casi:

(a.1) per carichi sincroni proporzionali (segnali in fase con valori medi nulli), il segmento passa per l'origine del sistema di riferimento $Puvw$;

(a.2) per carichi sincroni affini (segnali in fase con valori medi non nulli), il segmento non passa per l'origine del sistema di riferimento $Puvw$.

Nel caso (b), prodotto da carichi sincroni non proporzionali (segnali non in fase), si possono individuare i seguenti sotto-casi:

- (b.1) un'asse dell'ellisse è maggiore dell'altro;
- (b.2) i due assi dell'ellisse sono dello stesso ordine di grandezza.

Infine, il caso (c) è prodotto da carichi asincroni (segnali con pulsazioni differenti).

Al fine di validare l'implementazione proposta, sono ora esaminati dati sperimentali reperiti in letteratura e relativi a provini cilindrici lisci (barre e tubi in parete sottile) soggetti a carichi sinusoidali, sincroni e asincroni, in fase e non (Eq. (2.34a)-(2.34c)).

Le proprietà meccaniche e a fatica dei materiali esaminati sono riportate in *Tabella 2.3*.

I dettagli relativamente alle condizioni di carico in corrispondenza del limite di fatica sono riportati in *Tabella 2.4*, dove $\lambda_{xy} = \omega_{xy}/\omega_x$ e $\lambda_y = \omega_y/\omega_x$.

Tabella 2.3 Proprietà meccaniche e a fatica dei materiali analizzati.

Autori	Materiale	σ_u	$\sigma_{af,-1}$	$\tau_{af,-1}$	$\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}}$
		[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]
Nishihara, 1945	Acciaio duro	681	313.9	196.2	0.63
	Acciaio dolce	374	235.4	137.3	0.58
	Ghisa	181	96.1	91.2	0.95
Froustey, 1989	Acciaio 30NCD16	1880	660.0	410.0	0.62
Bhongbhibhat, 1986	Acciaio St35	340	230.0	130.0	0.57
	Acciaio 42CrMo4V	1003	485.00	315.0	0.65
Zenner, 1985	Acciaio 25CrMo4	780	361.0	228.0	0.63
Troost, 1987	Acciaio 25CrMo4	660	340.0	228.0	0.67
Heidenreich, 1983	Acciaio 34Cr4	550	343.0	204.0	0.59
Kaniut, 1983	Acciaio 25CrMo4	-	340.0	228.0	0.67
McDiarmid, 1985	Acciaio En24T	-	405.0	270.0	0.67

Tali dati sperimentali vengono raggruppati in *Tabella 2.4* in funzione della tipologia di percorso della tensione tangenziale, e più precisamente:

(i) i provini No. 1-9 (Nishihara, 1945) e No. 10 (Froustey, 1989) sono caratterizzati da percorsi Σ rappresentati da segmenti di tipo (a.1);

(ii) i provini No. 11 e 12 (Bhongbhibhat, 1986) sono caratterizzati da percorsi Σ rappresentati da segmenti di tipo (a.2);

(iii) i provini No. 13-28 (Nishihara, 1945), No. 29-31 (Bhongbhibhat, 1986) e No. 32-40 (Froustey, 1989) sono caratterizzati da percorsi Σ rappresentati da ellissi di tipo (b.1);

(iv) i provini No. 41-44 (Zenner, 1985) e No. 45-50 (Troost, 1987) sono caratterizzati da percorsi Σ rappresentati da ellissi di tipo (b.2);

(v) i provini No. 51 (Heidenreich, 1983), No. 52-55 (Kaniut, 1983), No. 56 (McDiarmid, 1985) e No. 57 e 58 (Bhongbhibhat, 1986) sono caratterizzati da percorsi Σ rappresentati da generiche curve chiuse di tipo (c).

Tabella 2.4 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	Σ	α	β	λ_{xy} λ_y	$\sigma_{x,a}$	$\sigma_{x,m}$	$\sigma_{y,a}$	$\sigma_{y,m}$	$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,m}$
			[°]	[°]	[-]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
Acciaio duro	1	(a.1)	0	0	1	131.8	0.0	0.0	0.0	167.1	0.0
	2		0	0	1	245.3	0.0	0.0	0.0	122.7	0.0
	3		0	0	1	299.1	0.0	0.0	0.0	62.8	0.0
Acciaio dolce	4	(a.1)	0	0	1	99.9	0.0	0.0	0.0	120.9	0.0
	5		0	0	1	180.3	0.0	0.0	0.0	90.2	0.0
	6		0	0	1	213.2	0.0	0.0	0.0	44.8	0.0
Ghisa	7	(a.1)	0	0	1	56.3	0.0	0.0	0.0	68.0	0.0
	8		0	0	1	83.4	0.0	0.0	0.0	41.6	0.0
	9		0	0	1	95.2	0.0	0.0	0.0	19.7	0.0
Acciaio 30NCD16	10	(a.1)	0	0	1	485.0	0.0	0.0	0.0	280.0	0.0
Acciaio St35	11	(a.2)	0	0	1	160.0	176.0	160.0	176.0	0.0	0.0
Acciaio 42CrMo4V	12	(a.2)	0	0	1	402.0	442.0	201.0	221.0	0.0	0.0
Acciaio duro	13	(b.1)	0	30	1	140.4	0.0	0.0	0.0	169.9	0.0
	14		0	30	1	249.7	0.0	0.0	0.0	124.9	0.0
	15		0	60	1	145.7	0.0	0.0	0.0	176.3	0.0
	16		0	60	1	252.4	0.0	0.0	0.0	126.2	0.0
	17		0	90	1	150.2	0.0	0.0	0.0	181.7	0.0
	18		0	90	1	258.0	0.0	0.0	0.0	129.0	0.0
Acciaio dolce	19	(b.1)	0	90	1	304.5	0.0	0.0	0.0	63.9	0.0
	20		0	60	1	103.6	0.0	0.0	0.0	125.4	0.0
	21		0	60	1	191.4	0.0	0.0	0.0	95.7	0.0
	22		0	90	1	108.9	0.0	0.0	0.0	131.8	0.0
	23		0	90	1	201.1	0.0	0.0	0.0	100.6	0.0
	24		0	90	1	230.2	0.0	0.0	0.0	48.3	0.0
Ghisa	25	(b.1)	0	60	1	67.6	0.0	0.0	0.0	81.6	0.0
	26		0	60	1	93.7	0.0	0.0	0.0	46.9	0.0
	27		0	90	1	73.2	0.0	0.0	0.0	88.4	0.0
	28		0	90	1	101.9	0.0	0.0	0.0	21.1	0.0
Acciaio St35	29	(b.1)	90	0	1	140.0	154.0	140.0	154.0	0.0	0.0
	30		180	0	1	120.0	132.0	120.0	132.0	0.0	0.0
Acciaio 42CrMo4V	31	(b.1)	90	0	1	402.0	442.0	201.0	221.0	0.0	0.0
Acciaio 30NCD16	32	(b.1)	0	0	1	211.0	300.0	0.0	0.0	365.0	0.0
	33		0	0	1	480.0	300.0	0.0	0.0	277.0	0.0
	34		0	0	1	590.0	300.0	0.0	0.0	148.0	0.0
	35		0	45	1	480.0	300.0	0.0	0.0	277.0	0.0
	36		0	45	1	565.0	300.0	0.0	0.0	141.0	0.0
	37		0	60	1	470.0	300.0	0.0	0.0	270.0	0.0
	38		0	90	1	473.0	300.0	0.0	0.0	273.0	0.0
	39		0	90	1	480.0	0.0	0.0	0.0	277.0	0.0
	40		0	90	1	540.0	300.0	0.0	0.0	135.0	0.0

	41		0	60	1	155.0	340.0	0.0	170.0	155.0	0.0
Acciaio	42	(b.2)	0	60	1	220.0	340.0	0.0	170.0	110.0	0.0
25CrMo4	43		0	90	1	159.0	340.0	0.0	170.0	159.0	0.0
	44		0	90	1	233.0	340.0	0.0	170.0	117.0	0.0
	45		0	90	1	208.0	255.0	156.0	210.0	104.0	0.0
	46		60	90	1	225.0	255.0	169.0	210.0	113.0	0.0
Acciaio	47	(b.2)	90	45	1	222.0	255.0	167.0	210.0	111.0	0.0
25CrMo4	48		90	90	1	205.0	255.0	154.0	210.0	103.0	0.0
	49		90	135	1	215.0	255.0	161.0	210.0	108.0	0.0
	50		180	90	1	224.0	255.0	168.0	210.0	112.0	0.0
Acciaio	51	(c)	0	0	2	200.0	244.0	200.0	244.0	0.0	0.0
34Cr4											
	52		0	0	0.25	210.0	0.0	0.0	0.0	105.0	0.0
Acciaio	53	(c)	0	90	2	220.0	0.0	0.0	0.0	110.0	0.0
25CrMo4	54		0	0	2	242.0	0.0	0.0	0.0	121.0	0.0
	55		0	0	8	196.0	0.0	0.0	0.0	98.0	0.0
Acciaio											
En24T	56	(c)	180	0	3	260.0	0.0	260.0	0.0	0.0	0.0
Acciaio	57	(c)	0	0	2	130.0	143.0	130.0	143.0	0.0	0.0
St35	58		90	0	2	140.0	154.0	140.0	154.0	0.0	0.0

Alcuni dei percorsi Σ qui sopra elencati vengono mostrati in *Figura 2.20*, riportando le componenti C_u e C_v del vettore C durante la storia di carico.

In *Figura 2.21*, sono riportati i valori dell'ampiezza C_a per ciascuno dei 58 dati sperimentali analizzati. Tali valori sono determinati sia applicando il metodo MBC (Papadopoulos, 1998) che il metodo PH (Mamiya, 2002; Mamiya, 2009; Araújo, 2011).

È importante sottolineare che il metodo PH introduce un incremento abbastanza significativo (fino al 30%) nel valore dell'ampiezza C_a rispetto al valore ottenuto con il metodo MBC, soprattutto per quei dati sperimentali con le seguenti caratteristiche di sollecitazione: i lati del rettangolo che contiene il percorso della tensione tangenziale sono dello stesso ordine di grandezza (provini No. 41-50 e No. 56).

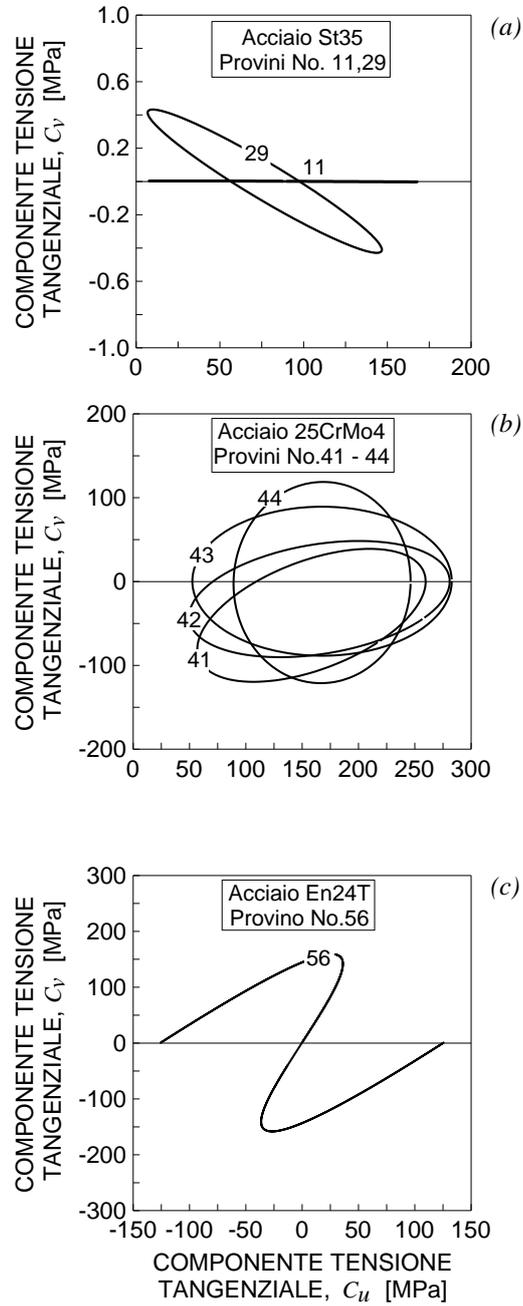


Figura 2.20 Percorsi descritti dalla tensione tangenziale: provini No. 11 e 29 (Bhonghibhat, 1986) (a); provini No. 41-44 (Zenner, 1985) (b); provino No. 56 (McDiarmid, 1985) (c).

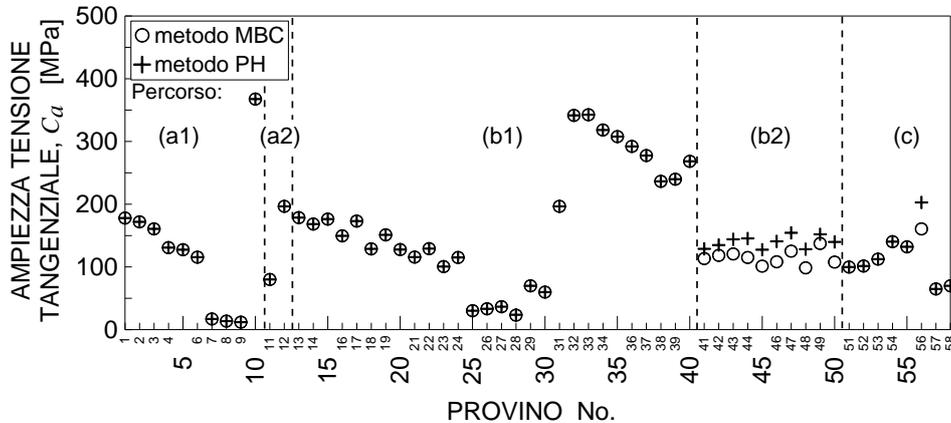


Figura 2.21 Valori di C_a ottenuti sia applicando il metodo MBC sia il metodo PH. Per ciascun provino è evidenziato il tipo di percorso della tensione tangenziale corrispondente.

Tale incremento riduce la non conservatività nei risultati, come si può osservare esaminando i valori dell'indice d'errore, I , rappresentati in Figura 2.22, essendo I calcolato come segue:

$$I = \frac{\sqrt{N_{a,eq}^2 + (\sigma_{af,-1} / \tau_{af,-1})^2 C_a^2} - \sigma_{af,-1}}{\sigma_{af,-1}} 100\% \quad (2.35)$$

dove valori positivi dell'indice d'errore I indicano risultati conservativi.

In particolare, Figura 2.22 mostra l'andamento della frequenza relativa dell'indice d'errore I sia applicando il metodo MBC che il metodo PH, per i provini No. 41-50 e No. 56.

Inoltre, i valori massimi e minimi dell'indice d'errore vengono riportati in Tabella 2.5 per ciascun materiale analizzato.

I valori di I , ottenuti sia dal metodo MBC che dal metodo PH, sono rappresentati in Figura 2.23 per carichi proporzionali e non proporzionali, rispettivamente.

Il valore medio assoluto dell'indice d'errore relativamente all'implementazione del metodo MBC è circa pari al 3% per carichi proporzionali e al 15% per carichi non proporzionali. Implementando il metodo PH, il valore medio assoluto

dell'indice d'errore è circa pari al 3% per carichi proporzionali e al 13% per carichi non proporzionali.

Da tale confronto emerge, quindi, che il metodo MBC e il metodo PH hanno la stessa precisione sia per carichi proporzionali sia per carichi non proporzionali, ma il metodo PH è computazionalmente più efficiente del metodo MBC.

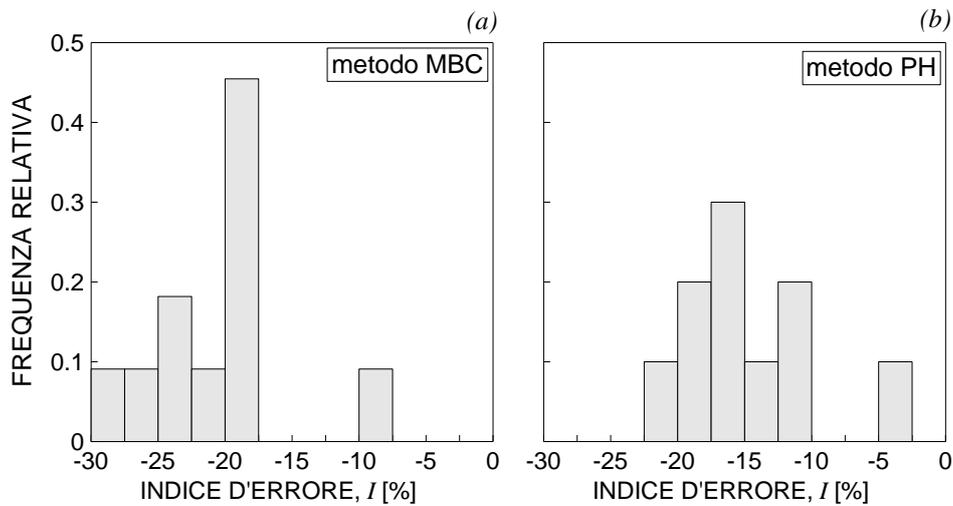


Figura 2.22 Frequenza relativa dell'indice d'errore per i provini No. 41-50 e No. 56, applicando: il metodo MBC (a); il metodo PH (b).

È importante sottolineare che tale conclusione è legata al fatto che il valore medio assoluto dell'indice d'errore è stato calcolato considerando tutti i dati sperimentali. Tuttavia, come evidenziato in *Figura 2.21*, il metodo PH incrementa i valori di C_a solo per quei dati sperimentali caratterizzati da percorsi della tensione tangenziale non eccessivamente piatti, cioè quando i lati del rettangolo sono dello stesso ordine di grandezza. Analizzando, quindi, i dati sperimentali con tale caratteristica (provini No. 41-50 e No. 56), il valore medio assoluto dell'indice d'errore I è pari al 21% e al 13% implementando il metodo MBC e il metodo PH, rispettivamente. A titolo di esempio si consideri il provino No. 47; in tal caso la diminuzione relativa del valore assoluto di I mediante l'implementazione del metodo PH è pari all'88% .

È possibile, quindi, affermare che per i suddetti dati sperimentali, la valutazione della resistenza a fatica migliora quando l'ampiezza C_a è calcolata applicando il metodo PH piuttosto che il metodo MBC.

Tabella 2.5 Valori massimi e minimi di I ottenuti applicando sia il metodo MBC sia il metodo PH per ciascun materiale analizzato.

Autori	Materiale	ΔI (MBC) [%]	ΔI (PH) [%]
Nishihara, 1945	Acciaio duro	-10 / -1	-10 / -1
	Acciaio dolce	-5 / 1	-5 / 1
	Ghisa	3 / 14	3 / 14
Froustey, 1989	Acciaio 30NCD16	-18 / 3	-18 / 3
Bhonghibhat, 1986	Acciaio St35	-36 / -15	-36 / -15
	Acciaio 42CrMo4V	-1	-1
Zenner, 1985	Acciaio 25CrMo4	-27 / -19	-20 / -11
Troost, 1987	Acciaio 25CrMo4	-24 / -9	-16 / -1
Heidenreich, 1983	Acciaio 34Cr4	-27	-27
Kaniut, 1983	Acciaio 25CrMo4	-46 / -23	-46 / -23
McDiarmid, 1985	Acciaio En24T	-28	-15

Le frequenze relative dell'indice d'errore I ottenute applicando il metodo PH sono riportate in *Figura 2.24*, dove i dati sperimentali vengono raggruppati in funzione del valore del rapporto tra il limite di fatica per tensione tangenziale alterna ed il limite di fatica per sforzo normale alterno, $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1}$. Dall'analisi di tali istogrammi emerge che:

(i) per metalli dolci ($\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1} \leq 0.6$, *Fig. 2.24(a)*), il valore assoluto dell'indice d'errore I ricade nell'intervallo $\pm 10\%$ per il 57% dei dati sperimentali analizzati;

(ii) per metalli duri ($0.6 < \tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1} < 0.8$, *Fig. 2.24(b)*), il valore assoluto dell'indice d'errore I ricade nell'intervallo $\pm 10\%$ per il 59% dei dati sperimentali analizzati;

(iii) per metalli estremamente duri ($\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1} \geq 0.8$, Fig. 2.24(c)), il valore assoluto dell'indice d'errore I ricade nell'intervallo $\pm 10\%$ per l'86% dei dati sperimentali analizzati.

In conclusione, è possibile affermare che l'implementazione proposta permette una valutazione piuttosto soddisfacente della resistenza a fatica di componenti metallici, come evidenziato sia dalla diminuzione del valore medio dell'indice d'errore, sia dalla notevole riduzione dell'onere computazionale.

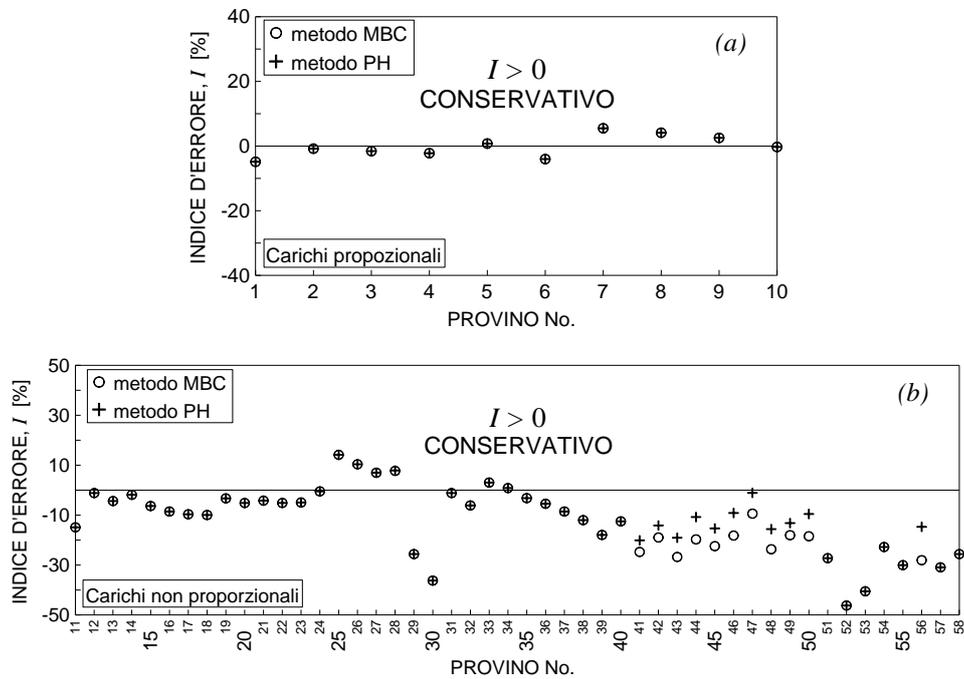


Figura 2.23 Valori dell'indice d'errore calcolati applicando sia il metodo MBC che il metodo PH: carichi proporzionali (a); carichi non proporzionali (b).

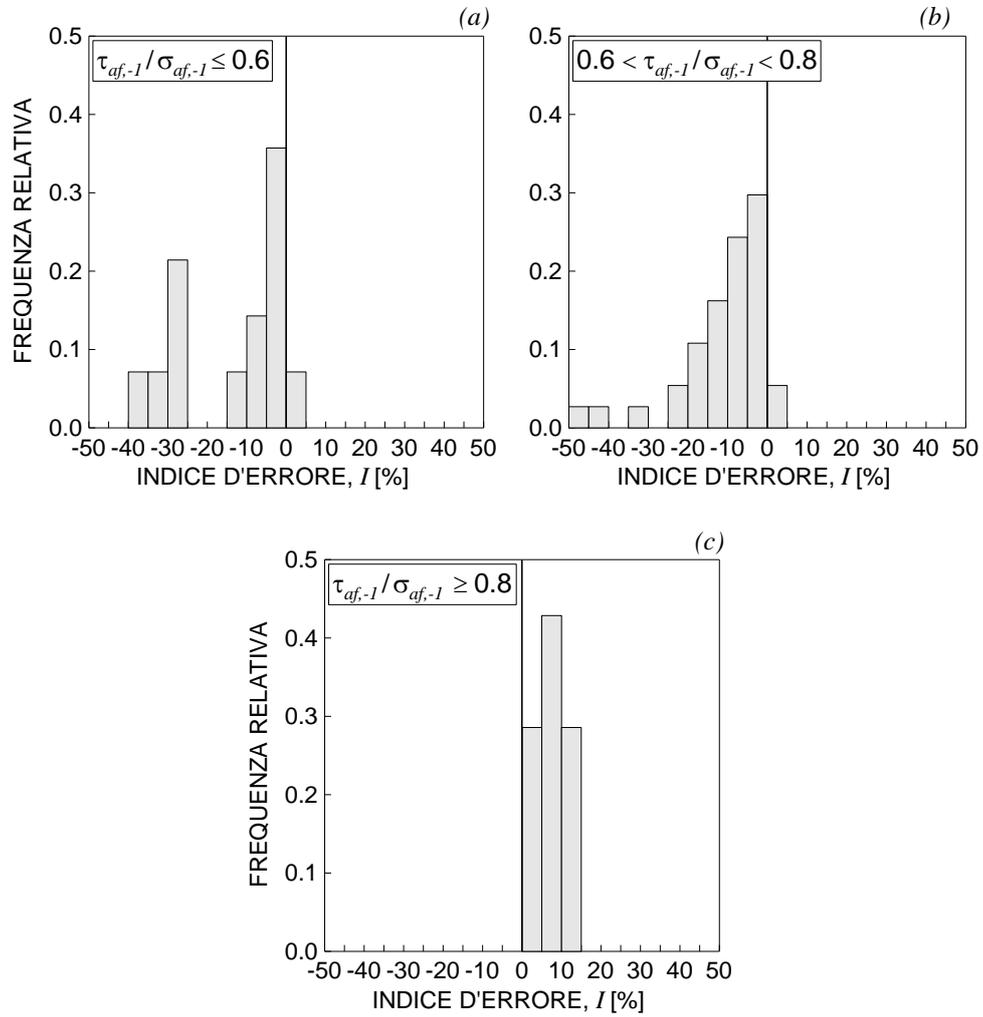


Figura 2.24 Valori dell'indice d'errore calcolati applicando il metodo PH, raggruppando i dati sperimentali in funzione del rapporto tra i limiti di fatica, $\tau_{af,-1}/\sigma_{af,-1}$: metalli dolci (a); metalli duri (b); metalli estremamente duri (c).

2.5 Bibliografia

- Araújo J.A., Dantas A.P., Castro F.C., Mamiya E.N., Ferreira J.L.A. (2011) On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. *International Journal of Fatigue* 33, 1092-1100.
- Basquin O.H. (1910) The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American Society for Testing and Materials* 10, 625-630.
- Bernasconi A. (2002) Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the shear deviator in fatigue criteria applications. *International Journal of Fatigue* 24, 649-57.
- Bhonghibhat T. (1986) *Festigkeitsverhalten von Stählen unter mehrachsiger phasenverschobener Schwingbeanspruchung mit unterschiedlichen Schwingungsformen und Frequenzen*. Tesi di Dottorato, Universität Stuttgart, Germania.
- Brown M.W., Miller K.J. (1973) A theory for fatigue failure under multi-axial stress-strain condition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 187, 745-55.
- Carpinteri A., Macha E., Brighenti R., Spagnoli A. (1999) Expected principal stress directions under multiaxial random loading – Part I (Theoretical aspects of the weight function method) e Part II (Numerical simulation and experimental assessment through the weight function method). *International Journal of Fatigue* 21, 83-96.
- Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. (2000) A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 23, 355-364.
- Carpinteri A., Spagnoli A. (2001) Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue* 23, 135-145.
- Carpinteri A., Karolczuk A., Macha E., Vantadori S. (2002) Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles. *International Journal of Fracture* 115, 87-99.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori V., Viappiani D. (2008) A multiaxial criterion for notch high-cycle fatigue using a critical-point method. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1864-1874.

- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Multiaxial fatigue life estimation in welded joints using the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 31, 188-196.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., Bagni C. (2013a) Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: the C-S criterion and its evolution. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 870-83.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2013b) MRH method and modified C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. In: *Atti del XXI Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA 2013)*, Torino.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S., Araújo J.A. (2014a) An alternative definition of the shear stress amplitude based on the Maximum Rectangular Hull method and application to the C-S (Carpinteri-Spagnoli) criterion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 764-771.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014b) On the use of the Prismatic Hull method in a critical plane-based multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue* 68, 159-167.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Critical plane orientation influence on multiaxial high-cycle fatigue assessment. *Physical Mesomechanics* 18, 348-354.
- Dietmann H., Bhonghibhat T., Schmid A. (1976) Multiaxial fatigue behaviour of steels under in-phase and out-of-phase loading, including different wave forms and frequencies. In: *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*, ESIS10, a cura di K. Kussmaul, D. McDiarmid e D. Socie, Mechanical Engineering Publications, London, 449-469.
- Findley W.N. (1959) A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME 81, 301-306.

- Froustey C., Lasserre S. (1989) Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel. *International Journal of Fatigue* 11, 169-175.
- Froustey C., Lasserre S. (1992) Multiaxial fatigue of steel - testing out of phase and in blocks: validity and applicability of some criteria. *International Journal of Fatigue* 14, 113-20.
- Gonçalves C.A., Araújo J.A., Mamiya E.N. (2005) Multiaxial fatigue: a simple stress based criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue* 27, 177-187.
- Goodman J. (1899) *Mechanics Applied to Engineering*. Longmans Green, London.
- Gough H.J., Pollard H.V., Clenshaw W.J. (1951) *Some Experiments on the Resistance of Metals to Fatigue under Combined Stresses*. Aeronautical Research Council Reports, R and M 2522, HMSO, London.
- Grubisic V., Simbürger A. (1976) Fatigue under combined out of phase multiaxial stresses. In: *Proceedings of International Conference on Fatigue Testing and Design*, Society of Environmental Engineers, London, 27.1-27.8.
- Heidenreich R., Zenner H., Richter I. (1983) Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. *Forschungshefte (FKM)* 105.
- Kaniut C. (1983) *Zur Betriebsfestigkeit metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger Beanspruchung*. Tesi di Dottorato, Aachen, Germany.
- Karolczuk A., Macha E. (2005) A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials. *International Journal of Fracture* 134, 267-304.
- Kluger K. (2015) Fatigue life estimation for 2017A-T4 and 6082-T6 aluminium alloys subjected to bending-torsion with mean stress. *International Journal of Fatigue* 80, 22-29.
- Krzysztof K., Łagoda T. (2014) New energy model for fatigue life determination under multiaxial loading with different mean values. *International Journal of Fatigue* 66, 229-245.
- Kurek M., Łagoda T. (2014) Including of ratio of fatigue limits from bending and torsion for estimation fatigue life under cyclic loading. In: *6th New Methods of Damage and Failure Analysis of Structural Parts (MDFA)*, Ostrava, Repubblica Ceca.

- Lagoda T., Macha E. (1994) Estimated and experimental fatigue lives of 30CrNiMo8 steel under in-and out-of-phase combined bending and torsion with variable amplitudes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 17, 1307-1318.
- Lagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lee S.B. (1985) A criterion for fully reversed out-of-phase torsion and bending. In: *Multiaxial Fatigue*, a cura di K.J. Miller e M.W. Brown, ASTM STP 853, Philadelphia, 553-568.
- Lemaitre J., Chaboche J.L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Li B., Santos J.L.T., de Freitas M. (2000) A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. *Mechanics of Structures and Machines* 28, 85-103.
- Li B., Santos J.L.T., de Freitas M. (2001) A computerized procedure for long-life fatigue assessment under multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 24, 165-77.
- Macha E. (1989) Simulation investigations of the position of fatigue fracture plane in materials with biaxial loads. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 20, 132-136 e 153-163.
- Mamiya E.N., Araújo J.A. (2002) Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress. *Mechanics Research Communications* 29, 141-51.
- Mamiya E.N., Araújo J.A., Castro F.C. (2009) Prismatic hull: a new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue* 31, 1144-1153.
- Marciniak Z., Rozumek D., Macha E. (2014) Verification of fatigue critical plane position according to variance and damage accumulation methods under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* 58, 84-93.
- Matake T. (1977) An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers* 20, 257-263.

- McDiarmid D.L. (1985) Fatigue under out-of-phase biaxial stresses of different frequencies. In: *Multiaxial Fatigue*, a cura di K.J. Miller e M.W. Brown, ASTM STP 853, Philadelphia, 606-621.
- McDiarmid D.L. (1987) Fatigue under out-of-phase bending and torsion. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 9, 457-475.
- McDiarmid D.L. (1991) A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 14, 429-453.
- Niesłony A., Łagoda T., Walat K., Kurek M. (2014) Multiaxial fatigue behaviour of selected aluminium alloys under bending with torsion loading condition. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 45, 947-952.
- Nishihara T., Kawamoto M. (1945) The strength of metals under combined alternating bending and torsion with face difference. In: *Memoirs of the College of Engineering*, Kyoto Imperial University, 85-112.
- Papadopoulos I.V. (1987) *Fatigue polycyclique des metaux une nouvelle approche*. Tesi di Dottorato, École Nationale des Ponts et Chaussees, Francia.
- Papadopoulos I.V. (1994) A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals. *International Journal of Fatigue* 16, 377-84.
- Papadopoulos I.V. (1998) Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 21, 269-285.
- Ronchei C., Carpinteri A., Fortese G., Spagnoli A., Vantadori S., Kurek M., Łagoda T. (2015) Life estimation by varying the critical plane orientation in the modified Carpinteri-Spagnoli criterion. *Frattura ed Integrità Strutturale* 34, 74-79.
- Sanetra C. (1991) *Untersuchungen zum Fetigkeitsvwrhalten bei mehrachsiger Randombeanspruchung unter Biegung und Torsion*. Tesi di Dottorato, Technische Universitat Clausthal, Germania.
- Susmel L., Lazzarin P. (2002) A Bi-parametric modified Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 25, 63-78.

- Susmel L. (2009) *Multiaxial notch fatigue*. Woodhead Publishing Limited, Cambridge.
- Susmel L., Tovo R., Socie D.F. (2014) Estimating the orientation of Stage I crack paths through the direction of maximum variance of the resolved shear stress. *International Journal of Fatigue* 58, 94-101.
- Troost A., Akin O., Klubberg F. (1987) Dauerfestigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe bei zweiachsiger Beanspruchung durch drei phasenverschobene schwingende Lastspannungen. *Konstruktion* 39, 479-488.
- Wang C., Shang D.G., Wang X.W. (2015) A new multiaxial high-cycle fatigue criterion based on the critical plane for ductile and brittle materials. *Journal of Materials Engineering and Performance* 24, 816-824.
- Zenner H., Heidenreich R., Richter I. (1985) Dauerschwingfestigkeit bei nicht synchroner mehrachsiger Beanspruchung. *Zeitschrift für Werkstofftechnik* 16, 101-112.
- Zouain N., Mamiya E.N., Comes F. (2006) Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 25, 51-71.

VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI CICLICI E BASSO/MEDIO NUMERO DI CICLI

3.1 Introduction

The present Chapter deals with the problem of fatigue life evaluation under low/medium-cycle fatigue (LCF) for metallic structural components subjected to multiaxial constant-amplitude cyclic loadings. In particular, the problem is addressed by applying a new criterion. Some results have been published in (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

The research in the low/medium-cycle fatigue field has systematically been developed in the late 1950s and early 1960s in order to explain the sudden failures of some metallic structural components such as nuclear reactors and jet engines. In particular, the above failures occurred in presence of multiaxial loadings with large amplitudes, at low number of loading cycles (usually lower than 10^5). Moreover, it was experimentally observed that the above loadings resulted in significant plastic deformations which affected the formation of fatigue cracks.

The multiaxial low/medium-cycle fatigue criteria are formulated in terms of strains, and employ different approaches (see Paragraph 1.4). The multiaxial low/medium-cycle fatigue criterion proposed in the present Ph.D. Thesis is based on the critical plane approach and is formulated in terms of strains. Some results have been published in Refs (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015). Such a criterion is a reformulation of the stress-based multiaxial high-cycle fatigue criterion (Carpinteri, 2011) discussed in Chapter 2, so that the combination of these two criteria may represent an useful design tool for any multiaxial loading condition (both HCF and LCF).

According to the criterion here proposed, the orientation of the critical plane is assumed to be correlated with the averaged directions of the principal strain axes through an off-angle (which is able to take into account the nature of fracture and, consequently, the degree of the material ductility) (Carpinteri, 2015). Further, a nonlinear combination of the amplitudes of the displacement components (normal displacement and tangential displacement) acting on the critical plane is employed as fatigue damage parameter.

Since the material has generally a plastic behaviour in low-cycle fatigue regime, the effective Poisson ratio, ν_{eff} , is needed to be used to define the strain tensor. Accordingly, the present Chapter is focused to the evaluation of such a parameter by employing three different methods: (i) an analytical approach, (ii) a non-linear finite element analysis, (iii) assuming a constant value equal to 0.5 (Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

The effectiveness of the present criterion is analysed through experimental data available in the literature, related to multiaxial low/medium cycle fatigue tests performed on smooth specimens made of alloys steel (Socie, 1987; Fatemi, 1989; Kim, 1999; Shang, 2000; Shang, 2007; Susmel, 2009a). In particular, in order to examine the influence of the effective Poisson ratio, ν_{eff} , on the fatigue life estimation, the three above methods are employed to determine such a parameter.

Furthermore, the structural metallic components are often characterised, during their service life, by geometrical discontinuities (such as notches) which result in stress concentration phenomena. In order to take into account the occurrence of the above phenomena, the present criterion is extended to the case of notched structural components. Such an extension is formulated by implementing the concept of the control volume related to the Strain Energy Density (SED) criterion proposed by Lazzarin et al. (Lazzarin, 2004; Berto, 2011; Berto, 2014).

Finally, the proposed criterion is employed for fatigue life estimation of sharp V-notched specimens made of grade 5 titanium alloy (Ti-6Al-4V) and subjected to stress-controlled uniaxial and biaxial fatigue (Berto, 2015).

3.1 Introduzione

Il presente Capitolo è dedicato al problema della valutazione della resistenza a fatica di componenti strutturali metallici soggetti a carichi ciclici e basso/medio numero di cicli, problema che viene affrontato impiegando un criterio di nuova formulazione (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

Un notevole impulso alla ricerca scientifica nel campo della fatica a basso/medio numero di cicli di carico si è avuto negli anni '50 e '60 per spiegare le rotture improvvise di alcuni componenti strutturali metallici come ad esempio i serbatoi in pressione degli impianti nucleari e i motori degli aerei. In particolare, queste rotture si verificavano per sollecitazioni multiassiali di ampiezza molto elevata in corrispondenza di un numero limitato di cicli di carico (di solito inferiore a 10^5). Inoltre, fu sperimentalmente osservato che tali sollecitazioni producevano deformazioni plastiche significative, che influenzavano la nucleazione di fessure per fatica.

I criteri per la valutazione della vita a fatica in presenza di basso/medio numero di cicli risultano formulati in termini di deformazioni e si differenziano in base all'approccio impiegato (approcci presentati al Paragrafo 1.4).

Il criterio di fatica multiassiale per basso/medio numero di cicli proposto nella presente Tesi appartiene alla categoria dei criteri basati sull'approccio del piano critico ed è formulato in termini di deformazioni (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

La formulazione proposta trae spunto, come impostazione generale, dal criterio di fatica multiassiale in regime di alto numero di cicli (Carpinteri, 2011) discusso nel Capitolo 2. Il criterio proposto vuole, quindi, essere la naturale estensione del criterio per alto numero di cicli, così che l'unione dei due possa rappresentare un utile strumento di progettazione, impiegabile per qualsiasi tipologia di carico multiassiale ciclico.

Secondo tale criterio, la giacitura del piano critico risulta correlata alle direzioni medie principali di deformazione attraverso un angolo, la cui espressione tiene conto della natura della frattura (duttile o fragile), cioè del grado di duttilità del materiale (Carpinteri, 2015). Inoltre, la valutazione della resistenza a fatica

viene eseguita attraverso una combinazione non lineare delle ampiezze delle componenti di spostamento (normale e tangenziale) agenti sul piano critico.

Poiché in regimi a basso/medio numero di cicli le sollecitazioni in gioco sono tali che generalmente il materiale plasticizza, nella definizione del tensore di deformazione occorre prestare particolare attenzione al metodo impiegato per valutare il coefficiente efficace di Poisson, ν_{eff} . Di conseguenza, il presente Capitolo è anche focalizzato alla valutazione di tale parametro secondo tre differenti metodologie, al fine di individuare la strategia migliore da adottare e più precisamente: per via analitica, attraverso analisi numeriche agli elementi finiti, ipotizzando un valore costante pari a 0.5 (Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

Per validare l'affidabilità del criterio proposto vengono esaminati dati sperimentali reperiti in letteratura, relativi a prove di fatica multiassiale a basso/medio numero di cicli condotte su provini lisci realizzati in leghe di acciaio (Socie, 1987; Fatemi, 1989; Kim, 1999; Shang, 2000; Shang, 2007; Susmel, 2009a). In particolare, i risultati numerici sono ottenuti al variare del valore di ν_{eff} nella formulazione del criterio proposto, al fine di stabilirne l'influenza relativamente alla valutazione della vita a fatica.

Inoltre, nella pratica applicativa non è raro che i componenti strutturali metallici contengano delle discontinuità geometriche. Al fine di considerare l'insorgenza dei significativi gradienti tensionali che si verificano in presenza di discontinuità geometriche, come gli intagli, il criterio proposto nella presente Tesi viene anche esteso al caso dei componenti strutturali intagliati. Tale estensione viene formulata sfruttando il concetto di volume di controllo, proposto da Lazzarin e collaboratori nell'ambito del metodo Strain Energy Density (SED) (Lazzarin, 2004; Berto, 2011; Berto, 2014).

Infine, il criterio proposto viene utilizzato per stimare la vita a fatica di provini con un severo intaglio a V, realizzati in lega di titanio grado 5 (Ti-6Al-4V) e soggetti a prove di fatica uniassiali e biassiali in controllo di carico (Berto, 2015).

3.2 Formulazione del criterio proposto nella presente Tesi

La valutazione della resistenza a fatica per basso/medio numero di cicli viene eseguita considerando lo stato deformativo che si realizza sul piano critico in

corrispondenza di un punto ritenuto critico per la resistenza a fatica del materiale e generalmente posizionato in prossimità della superficie esterna del componente strutturale.

Il criterio si compone delle seguenti fasi:

- (i) determinazione delle direzioni medie principali di deformazione;
- (ii) determinazione della giacitura del piano critico;
- (iii) determinazione delle componenti di spostamento agenti sul piano critico (ampiezza della componente normale e ampiezza della componente tangenziale);
- (iv) valutazione della vita a fatica eseguita attraverso una combinazione quadratica delle ampiezze delle componenti di spostamento di cui sopra, entrambe relative al piano critico.

Tali fasi, riportate graficamente in *Figura 3.1*, vengono discusse dettagliatamente nei seguenti Paragrafi.

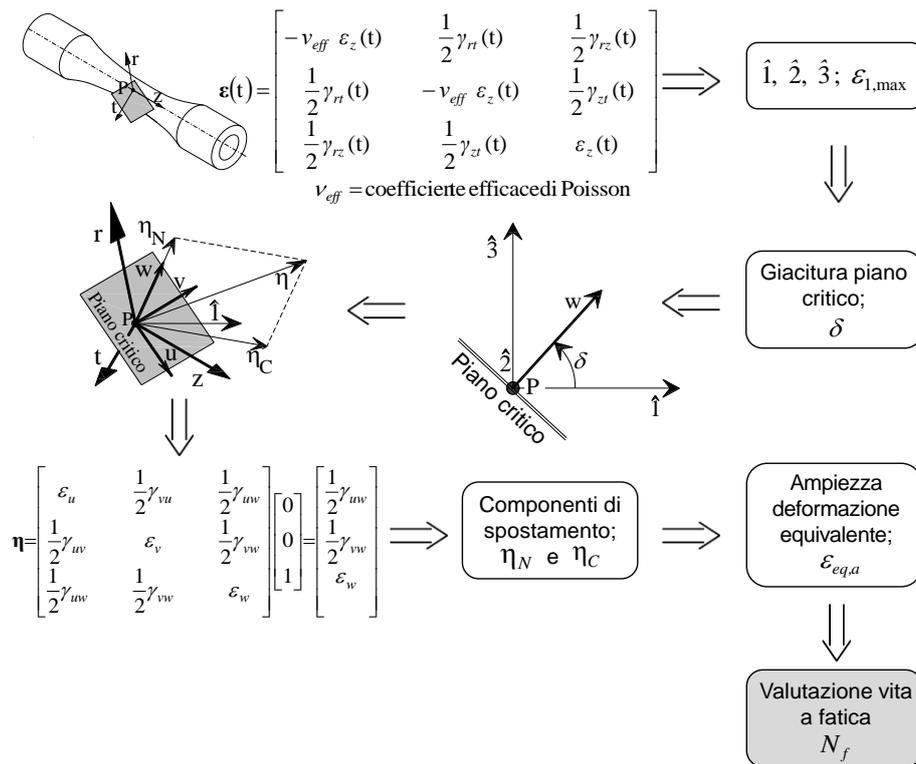


Figura 3.1 Rappresentazione grafica della formulazione del criterio proposto.

3.2.1 Direzioni medie principali di deformazione

Si consideri un punto P appartenente al componente strutturale soggetto ad un carico (Fig. 3.1), e sia $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ il tensore delle deformazioni relativo a P . Ad un certo istante temporale t , i coseni direttori delle direzioni principali di deformazione 1, 2, e 3 (essendo $\varepsilon_1(t) \geq \varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_3(t)$), rispetto al sistema di riferimento fisso $Prtz$ (Figs. 3.1 e 3.2(a)), possono essere calcolati a partire dal tensore $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

Il sistema di riferimento ortogonale $P123$, con origine in P e assi coincidenti con le direzioni principali di deformazione (Fig. 3.2(b)), può essere univocamente definito mediante i tre angoli principali di Eulero, ϕ, θ, ψ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$), che descrivono tre rotazione antiorarie successive intorno agli assi z, t' e 1, rispettivamente (Carpinteri, 1999). Considerando la notazione qui adottata per individuare le direzioni principali di deformazione, la direzione 1 della deformazione principale massima risulta essere funzione di soli due parametri: ϕ e θ .

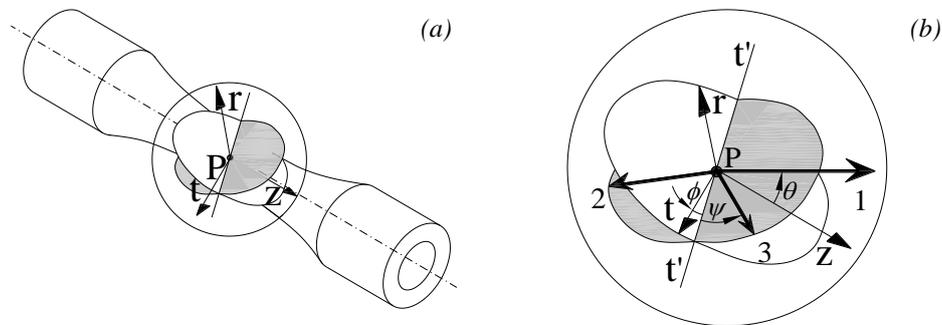


Figura 3.2 Sistema di riferimento $Prtz$ relativo al punto P del componente strutturale (a); direzioni principali di deformazione 1, 2, 3 definite mediante gli angoli di Eulero ϕ, θ, ψ (b).

Le direzioni medie $\hat{1}, \hat{2},$ e $\hat{3}$ principali di deformazione vengono determinate attraverso gli angoli medi di Eulero $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$, ottenuti mediando i valori istantanei di tali angoli $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ (Fig. 3.3):

$$\hat{\phi} = \frac{1}{W_0} \int_0^T \phi(t)W(t)dt \quad \hat{\theta} = \frac{1}{W_0} \int_0^T \theta(t)W(t)dt \quad \hat{\psi} = \frac{1}{W_0} \int_0^T \psi(t)W(t)dt \quad (3.1)$$

essendo $T =$ periodo e $W(t) =$ funzione peso, definita come:

$$W(t) = \delta[\varepsilon_1(t) - \varepsilon_{1,max}] \quad (3.2)$$

con $\delta[x] = 1$ per $x = 0$ e $\delta[x] = 0$ per $x \neq 0$ e $\varepsilon_{1,max}$ il valore massimo della deformazione principale massima, ε_1 , in un ciclo di carico.

La funzione peso adottata è tale che le direzioni medie principali di deformazione coincidono con le direzioni principali istantanee, nell'istante di tempo in cui la deformazione principale massima, ε_1 , raggiunge il valore massimo in un ciclo di carico.

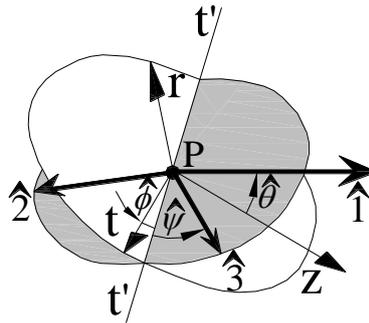


Figura 3.3 Direzioni medie principali di deformazione $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ individuate dagli angoli medi di Eulero $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$.

3.2.2 Determinazione della giacitura del piano critico

Come evidenziato sperimentalmente da Brown e Miller (Brown, 1973; Wang, 1973), il danno a fatica in presenza di sollecitazioni multiassiali cicliche e basso/medio numero di cicli è influenzato dalle componenti di deformazione normale e tangenziale agenti sul piano di nucleazione della fessura.

Sulla base di tali osservazioni, Fatemi e Socie (Socie, 1987; Fatemi, 1988) hanno proposto due differenti criteri di fatica multiassiale in funzione del comportamento del materiale relativamente al fenomeno di nucleazione, e più

precisamente: se la nucleazione della fessura risulta governata dal Modo II (frattura duttile), il piano critico (piano di nucleazione) viene assunto coincidente al piano che sperimenta lo scorrimento angolare di ampiezza massima e per la valutazione della resistenza a fatica viene impiegata la curva di Manson-Coffin, formulata in termini di scorrimenti (Socie, 1987). Nel caso in cui la nucleazione della fessura sia governata dal Modo I (frattura fragile), il piano critico viene assunto coincidente con il piano che sperimenta la deformazione normale di ampiezza massima e per la valutazione della resistenza a fatica viene impiegata la curva di Manson-Coffin (Fatemi, 1988), opportunamente riformulata per tener conto dell'effetto prodotto dalla presenza di deformazioni con valore medio non nullo (Smith, 1970).

La determinazione della giacitura del piano critico proposta nella presente Tesi considera entrambe le assunzioni sopra riportate, unitamente all'analogia tra fatica per alto numeri di cicli e rottura fragile da un lato, e tra fatica per basso/medio numero di cicli e rottura duttile dall'altro (analogie presentate in dettaglio al Capitolo 1). Ciò significa che l'angolo tra la normale al piano critico e la direzione della massima deformazione principale è uguale a 45° quando la frattura è estremamente duttile, mentre la normale al piano critico tende a coincidere con la direzione della massima deformazione principale quando la frattura è estremamente fragile.

In particolare, la normale al piano critico viene definita attraverso un angolo δ , compreso tra la normale \mathbf{w} a tale piano (dove \mathbf{w} appartiene al piano principale $\hat{1}\hat{3}$, Fig. 3.3) e la direzione media $\hat{1}$ della massima deformazione principale (che individua la normale al piano di frattura):

$$\delta = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2(1+\nu_{eff})} \frac{\gamma_a}{\varepsilon_a} \right)^2 \right] 45^\circ \quad (3.3)$$

dove ν_{eff} è il coefficiente efficace di Poisson, e ε_a e γ_a sono calcolate mediante le seguenti formule di Manson-Coffin:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (3.4)$$

$$\gamma_a = \frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^{b_0} + \gamma'_f (2N_f)^{c_0} \quad (3.5)$$

essendo N_f il numero di cicli a rottura. Inoltre, E , σ'_f , ε'_f , b , c e G , τ'_f , γ'_f , b_0 , c_0 sono delle costanti del materiale da determinare attraverso appropriate prove di fatica uniassiali.

L'espressione di δ riportata nell'Eq. (3.3) è in grado di considerare la natura della frattura. Più precisamente, quando la frattura è estremamente duttile (cioè $N_f \rightarrow 0$) il rapporto γ_a/ε_a è pari a:

$$\lim_{N_f \rightarrow 0} \frac{\gamma_a}{\varepsilon_a} = \frac{\gamma'_f}{\varepsilon'_f} \quad (3.6)$$

Assumendo tale rapporto pari a $\sqrt{3}$ (Susmel, 2009a) e $\nu_{eff} = 0.5$, l'angolo δ (Eq. (3.3)) è pari a 45° .

Quando la frattura è fragile (cioè $N_f \rightarrow 2(10)^6$, assumendo che tale valore sia rappresentativo del numero di cicli di carico in corrispondenza dei limiti di fatica del materiale, indipendentemente dal carico applicato), il rapporto γ_a/ε_a è dato da:

$$\lim_{N_f \rightarrow 2(10)^6} \frac{\gamma_a}{\varepsilon_a} = \frac{\tau_{af,-1}}{G} \frac{E}{\sigma_{af,-1}} = \frac{\tau_{af,-1} 2(1+\nu_{eff})}{E} \frac{E}{\sigma_{af,-1}} = \frac{2(1+\nu_{eff}) \tau_{af,-1}}{\sigma_{af,-1}} \quad (3.7)$$

essendo $\sigma_{af,-1}$ il limite di fatica per tensione normale alterna e $\tau_{af,-1}$ il limite di fatica per tensione tangenziale alterna. Nel caso di metalli duri, caratterizzati da un rapporto tra i limiti di fatica pari a 1, la frattura è estremamente fragile. In questo caso limite, l'angolo δ risulta, allora, pari a 0° .

È importante sottolineare che, in presenza di una frattura fragile, l'espressione di δ dell'Eq. (3.3) è in accordo con l'espressione impiegata nel criterio di fatica multiassiale per alto numero di cicli proposto da Carpinteri e collaboratori (Carpinteri, 2011) (si veda Paragrafo 2.2.2), ma è diversa da quella riportata in (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c), dove il valore di δ è

assunto costante e pari a 45° . In quest'ultimo caso, non si è in grado di tener conto della natura della frattura (duttile o fragile), cioè del grado di duttilità del materiale.

Infine, si noti che il valore dell'angolo δ proposto per la determinazione della giacitura del piano critico dipende dal numero di cicli a rottura, N_f .

3.2.3 Componenti di spostamento relative al piano critico

Per la valutazione della componente normale e della componente tangenziale di spostamento relative al generico punto P dell'elemento strutturale, si procede come introdotto al Capitolo 1 - Paragrafo 1.5.2.

In particolare, definita la normale \mathbf{w} al piano critico, si considera un sistema di riferimento locale $Puvw$, dove \mathbf{u} è la direzione determinata dall'intersezione del piano critico e del piano definito dal versore normale \mathbf{w} e dall'asse z , mentre \mathbf{v} è normale a \mathbf{u} (Fig. 3.4).

Considerando, quindi, il sistema di riferimento $Puvw$ e riferendo il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ nel punto P (Fig. 3.1) a tale sistema di riferimento, il vettore spostamento, $\boldsymbol{\eta}_w$, relativo al piano critico è calcolato attraverso la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\eta}_w = \begin{bmatrix} \varepsilon_u & \frac{1}{2}\gamma_{uv} & \frac{1}{2}\gamma_{uw} \\ \frac{1}{2}\gamma_{uv} & \varepsilon_v & \frac{1}{2}\gamma_{vw} \\ \frac{1}{2}\gamma_{uw} & \frac{1}{2}\gamma_{vw} & \varepsilon_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{uw} \\ \frac{1}{2}\gamma_{vw} \\ \varepsilon_w \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Successivamente per ogni istante temporale t , il vettore $\boldsymbol{\eta}_w$ può essere scomposto in due componenti: la componente di spostamento normale $\boldsymbol{\eta}_N$ (perpendicolare al piano critico) e la componente di spostamento tangenziale $\boldsymbol{\eta}_C$ (agente sul piano critico) (Fig. 3.4), e calcolate come segue:

$$\boldsymbol{\eta}_N = (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\eta}_w) \mathbf{w} \quad \boldsymbol{\eta}_C = \boldsymbol{\eta}_w - \boldsymbol{\eta}_N \quad (3.9)$$

In particolare, il modulo del vettore $\boldsymbol{\eta}_N$ è rappresentato dalla componente di dilatazione ε_w , mentre il modulo del vettore $\boldsymbol{\eta}_C$ è una funzione delle componenti di scorrimento γ_{uw} e γ_{vw} :

$$\eta_C = \|\boldsymbol{\eta}_C\| = \sqrt{(\eta_{Cu})^2 + (\eta_{Cv})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\gamma_{uw}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{vw}\right)^2} \quad (3.10)$$

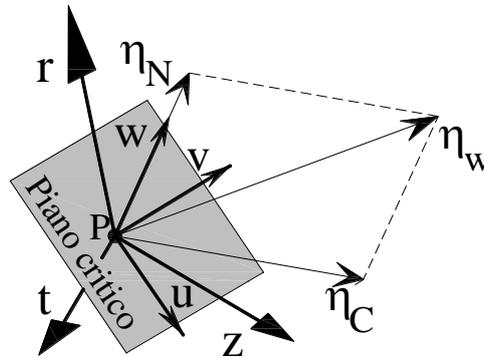


Figura 3.4 Sistema di riferimento $Prtz$ e $Puvw$ (gli assi u e v appartengono al piano critico, mentre l'asse w è ortogonale al piano critico).

Poiché la direzione del vettore $\boldsymbol{\eta}_N$ è fissa nel tempo, l'ampiezza della componente normale è data dalla seguente espressione:

$$\eta_{N,a} = \varepsilon_{w,a} = \max_{0 \leq t < T} \|\boldsymbol{\eta}_N(t)\| - \min_{0 \leq t < T} \|\boldsymbol{\eta}_N(t)\| \quad (3.11)$$

essendo T il periodo.

Al contrario, la direzione di $\boldsymbol{\eta}_C$ varia nel tempo e, quindi, per la definizione dell'ampiezza di tale vettore si ricorre al metodo del Minimum Bounding Circle (MBC) (Papadopoulos, 1998), in modo del tutto analogo al procedimento impiegato per l'ampiezza della componente tangenziale di tensione sul piano critico, presentato al Capitolo 2.

Nel caso di un elemento strutturale soggetto ad una sollecitazione normale che varia sinusoidalmente con pulsazione ω , e ad un momento torcente anch'esso variabile sinusoidalmente con la medesima pulsazione, ma sfasato rispetto alla

sollecitazione normale di un angolo di fase β , il vertice del vettore η_C descrive sul piano critico un percorso ellittico, Σ , come riportato nel Capitolo 1, Paragrafo 1.5.2 (Fig. 3.5). Per il caso in esame, l'ampiezza del vettore di spostamento tangenziale coincide, quindi, con il semiasse maggiore $\eta_{C,a}$ di tale ellisse ed è calcolata come:

$$\eta_{C,a} = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (3.12)$$

dove le funzioni f, g, p, q dipendono sia dai segnali delle componenti del tensore di deformazione (in termini di ampiezze e angoli di fase) sia dalla giacitura del vettore normale \mathbf{w} al piano critico (per le espressioni complete di tali funzioni si rimanda al Paragrafo 1.5.2).

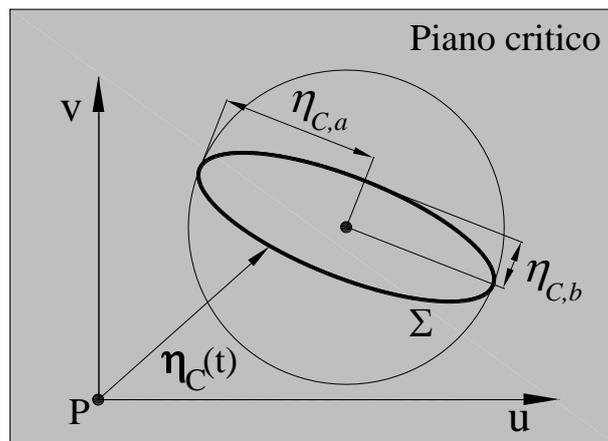


Figura 3.5 Percorso ellittico Σ descritto dal vettore η_C sul piano critico nel caso di carichi sinusoidali, sincroni, con segnali non in fase.

3.2.4 Valutazione della vita a fatica

La valutazione della vita a fatica in presenza di carichi multiassiali ciclici e basso/medio numero di cicli prevede di combinare non linearmente l'ampiezza della componente di spostamento normale $\eta_{N,a}$ e l'ampiezza della componente di spostamento tangenziale $\eta_{C,a}$, relative al piano critico:

$$\varepsilon_{eq,a} = \sqrt{(\eta_{N,a})^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{\gamma_a}\right)^2 (\eta_{C,a})^2} \quad (3.13)$$

essendo $\varepsilon_{eq,a}$ l'ampiezza di una dilatazione equivalente relativa al piano critico. Inoltre, ε_a e γ_a sono calcolate mediante le Eq. (3.4)-(3.5).

Al fine di procedere alla valutazione della resistenza a fatica multiassiale in modo del tutto analogo a quanto avviene in regime monoassiale, la dilatazione equivalente $\varepsilon_{eq,a}$ dell'Eq. (3.13) viene confrontata con l'ampiezza della deformazione calcolata secondo l'Eq. (3.4) (formula di Manson-Coffin per il caso di trazione ciclica monoassiale):

$$\varepsilon_{eq,a} = \sqrt{(\eta_{N,a})^2 + \left(\frac{\varepsilon_a}{\gamma_a}\right)^2 (\eta_{C,a})^2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (3.14)$$

Il numero di cicli a rottura, N_f , può essere determinato risolvendo l'Eq. (3.14) con una procedura iterativa.

Infine, è importante sottolineare che tutti i termini riportati nell'Eq. (3.14) sono funzione di N_f , mentre i termini della dilatazione equivalente $\varepsilon_{eq,a}$ utilizzata nell'iniziale formulazione del criterio (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c) non dipendono da N_f .

3.3 L'effetto della scelta del coefficiente efficace di Poisson

In presenza di deformazioni plastiche significative (come quelle caratterizzanti la fatica per basso/medio numero di cicli di carico), è necessario conoscere il coefficiente efficace di Poisson, il cui valore dipende dalla storia di carico applicata in corrispondenza del punto materiale, ritenuto critico per la verifica a fatica del componente strutturale.

Nel presente Paragrafo vengono proposte tre differenti strategie per la valutazione del coefficiente efficace di Poisson, ν_{eff} . In particolare, per il valore di tale coefficiente viene eseguito sia un calcolo per via analitica, che per via

numerica, ed impiegato un valore costante, strategia frequentemente proposta in letteratura (Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015).

Al fine di analizzare l'influenza di ν_{eff} sulla stima della vita a fatica del componente strutturale, i risultati numerici sono ottenuti al variare del valore di tale coefficiente.

Infine, l'affidabilità del criterio è valutata attraverso alcuni esempi applicativi, relativi a provini in leghe di acciaio (Socie, 1987; Fatemi, 1989; Kim, 1999; Shang, 2000; Shang, 2007; Susmel, 2009a), soggetti a trazione e torsione ciclica in controllo di deformazione.

3.3.1 Definizione del coefficiente efficace di Poisson

Si consideri il provino liscio di *Figura 3.1* soggetto a prova di fatica uniassiale di trazione ciclica in controllo di deformazione. In corrispondenza del punto P , posto sulla superficie esterna del componente strutturale, alla deformazione nella direzione assiale, ε_z , direttamente indotta dalla sollecitazione applicata, è associata sempre una contrazione trasversale della sezione del provino, descritta dalle deformazioni trasversali ε_r e ε_t . In particolare, le deformazioni trasversali sono pari a:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = -\nu_{eff} \varepsilon_z \quad (3.15)$$

dove ν_{eff} è il coefficiente efficace di Poisson. Il valore di tale coefficiente è definito scomponendo la deformazione totale ε_z nella componente elastica, $\varepsilon_{z,e}$, e in quella plastica, $\varepsilon_{z,p}$, come segue:

$$\nu_{eff} \varepsilon_z = \nu_e \varepsilon_{z,e} + \nu_p \varepsilon_{z,p} \quad (3.16)$$

essendo ν_e e ν_p il coefficiente elastico di Poisson e quello plastico, rispettivamente.

Nel caso più generale di prova di fatica biassiale in controllo di deformazione (sollecitazione ciclica di trazione e torsione), oltre alle dilatazioni di cui sopra, è presente anche lo scorrimento angolare γ_{zt} , direttamente indotto dalla

sollecitazione di torsione applicata. Il tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ in corrispondenza del punto P (Fig. 3.1) risulta, quindi, pari a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} -\nu_{eff} \varepsilon_z(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{eff} \varepsilon_z(t) & \frac{1}{2} \gamma_{zt}(t) \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma_{zt}(t) & \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Poiché in regimi a basso/medio numero di cicli le sollecitazioni in gioco sono tali che generalmente il materiale plasticizza, nella definizione del tensore $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ occorre prestare particolare attenzione al metodo da impiegare per valutare il coefficiente efficace di Poisson, ν_{eff} . In particolare, tale parametro può essere valutato impiegando tre differenti metodi, e più precisamente:

(i) un approccio analitico (coefficiente efficace analitico di Poisson, $\nu_{eff,A}$), scomponendo la deformazione totale nella componente elastica e in quella plastica, come riportato nell'Eq. (3.16).

È importante sottolineare che, in questo caso, è necessario misurare sperimentalmente la storia della deformazione assiale applicata (sia la deformazione totale, ε_z , che la componente plastica, $\varepsilon_{z,p}$) e la storia della tensione corrispondente, σ_z .

In particolare, noti il valore della tensione σ_z e del modulo elastico E del materiale, è possibile ricavare la componente di deformazione elastica come segue:

$$\varepsilon_{z,e} = \frac{\sigma_z}{E} \quad (3.18)$$

Supponendo poi di conoscere sperimentalmente il valore dei coefficienti elastico e plastico di Poisson, si determina il valore di $\nu_{eff,A}$ attraverso la seguente relazione:

$$\nu_{eff,A} = \frac{\nu_e \varepsilon_{z,e} + \nu_p \varepsilon_{z,p}}{\varepsilon_z}; \quad (3.19)$$

(ii) una formulazione numerica (coefficiente efficace numerico di Poisson, $\nu_{eff,n}$), attraverso analisi numeriche agli elementi finiti di tipo statico non lineare.

È importante sottolineare che, in questo caso, è necessario conoscere solo la storia della deformazione o della tensione applicata al componente strutturale.

In particolare, le analisi numeriche condotte, attraverso il metodo degli elementi finiti, si basano su una modellazione tridimensionale del provino soggetto a prove di trazione e torsione ciclica in controllo di deformazione. L'obiettivo è quello di calcolare le dilatazioni trasversali e quindi il valore del coefficiente efficace di Poisson. Le analisi, condotte impiegando il software di calcolo *Straus7*, versione 2.3, risultano di tipo statico non lineare.

Per condizioni di simmetria, viene modellata solo metà del provino. In particolare, il modello del provino è realizzato impiegando elementi tridimensionali isotropi a 6 e a 8 nodi (*Fig. 3.6*).

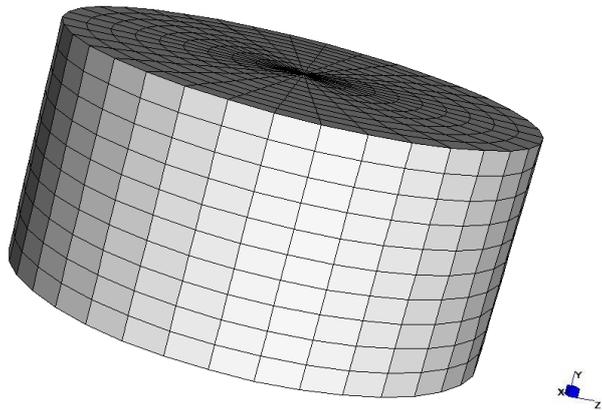


Figura 3.6 Modello numerico tridimensionale realizzato impiegando *Straus7*.

Il modello è vincolato alla base inferiore (che rappresenta il piano di simmetria del provino) allo spostamento verticale e tangenziale (*Fig. 3.7*; i segmenti in rosa indicano la direzione degli spostamenti nodali impediti).

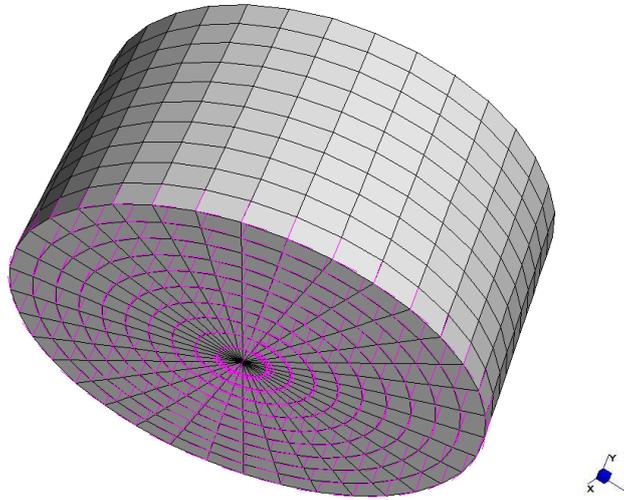


Figura 3.7 Vincoli alla base inferiore del modello numerico tridimensionale realizzato impiegando Straus7.

Per gli elementi tridimensionali costituenti il modello si considerano, in fase di modellazione, le seguenti proprietà meccaniche del materiale con cui è realizzato il provino: modulo elastico, E , coefficiente elastico di Poisson, ν_e , e tensione di snervamento, σ_y .

L'analisi statica non lineare è condotta imponendo, sulla base superiore del provino, degli spostamenti nodali in direzione verticale e tangenziale (variabili nel tempo con una legge sinusoidale) in modo da simulare la prova di fatica biassiale in esame.

Tale analisi consente di definire il coefficiente efficace di Poisson in funzione del rapporto tra i valori della dilatazione trasversale ($\varepsilon_r = \varepsilon_t$) e della dilatazione assiale (ε_z) (Eq. (3.15)) calcolati nel medesimo istante temporale e relativi al punto critico, in corrispondenza del quale eseguire la verifica a fatica, e posizionato in prossimità della superficie esterna del provino;

(iii) un valore costante. Il valore 0.5 è quello più frequentemente impiegato in letteratura (coefficiente efficace di Poisson di letteratura, $\nu_{eff,l}$), poiché le deformazioni in regime di basso/medio numero di cicli sono generalmente plastiche e, dunque, si può assumere l'ipotesi di volume costante (Zamrik, 1973).

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dall'analizzare l'influenza del coefficiente efficace di Poisson relativamente alla stima della vita a fatica. Pertanto, ho utilizzato i tre metodi di cui sopra per calcolare il valore di v_{eff} (Carpinteri, 2014c; Carpinteri, 2015), al fine di individuare la strategia migliore da adottare nell'ambito della verifica a fatica condotta secondo il criterio proposto nel presente Capitolo, criterio implementato in linguaggio *Fortran*.

3.3.2 Validazione del criterio proposto

Impiegando i tre metodi descritti in precedenza per determinare il coefficiente efficace di Poisson, la validazione del criterio proposto viene eseguita considerando alcuni dati sperimentali, relativi a prove di fatica biassiali a basso/medio numero di cicli condotte su provini tubolari lisci realizzati in lega di acciaio (acciaio 1045) (Fatemi, 1989).

I provini analizzati sono soggetti a carichi sinusoidali, sincroni, in fase e non, e lo stato deformativo applicato risulta:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z,a} \sin(\omega_z t) \quad (3.20a)$$

$$\gamma_{tz} = \gamma_{tz,a} \sin(\omega_{zt} t - \beta) \quad (3.20b)$$

dove $\varepsilon_{z,a}$ è l'ampiezza della deformazione normale longitudinale (assiale) e $\gamma_{zt,a}$ è l'ampiezza della deformazione tangenziale. Inoltre, ω_z = pulsazione della deformazione assiale ε_z , ω_{zt} = pulsazione della deformazione tangenziale γ_{zt} e β = angolo di fase tra ε_z e γ_{zt} .

Le proprietà meccaniche e a fatica del materiale (per il caso di trazione e torsione ciclica monoassiale) sono riportate in *Tabella 3.1* e *Tabella 3.2*, rispettivamente.

Tabella 3.1 Proprietà meccaniche del materiale analizzato.

Materiale	E [MPa]	G [MPa]	σ_y [MPa]	ν_e [-]	ν_p [-]
Acciaio 1045 (Fatemi, 1989)	205000	79100	382	0.29	0.50

Tabella 3.2 Proprietà a fatica del materiale analizzato.

Materiale	σ'_f [MPa]	b [-]	ε'_f [-]	c [-]	τ'_f [MPa]	b_0 [-]	γ'_f [-]	c_0 [-]
Acciaio 1045 (Fatemi, 1989)	1027	-0.107	0.322	-0.487	559	-0.097	0.413	-0.445

I dettagli relativi alle condizioni di carico analizzate, sia in termini di deformazioni che in termini di tensioni, sono riportati in *Tabella 3.3*, dove $N_{f,exp}$ indica il numero di cicli di carico sperimentale a rottura.

Tabella 3.3 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	β [°]	$\gamma_{z,a} / \varepsilon_{z,a}$	$\varepsilon_{z,a}$ [%]	$\gamma_{z,a}$ [%]	$\sigma_{z,a}$ [MPa]	$\tau_{z,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
	1	0	0.521	0.144	0.075	224.0	47.0	611780
	2	0	0.533	0.214	0.114	261.0	53.0	92000
	3	0	0.535	0.415	0.222	340.0	60.0	11777
	4	0	0.545	0.211	0.115	265.0	57.0	115462
	5	0	0.546	0.943	0.515	430.0	84.0	1259
	6	0	1.061	0.131	0.139	202.0	79.0	393634
	7	0	1.068	0.191	0.204	235.0	95.0	103000
	8	0	1.071	0.140	0.150	212.0	85.0	595613
	9	0	1.078	0.374	0.403	304.0	109.0	10377
	10	0	1.079	0.190	0.205	238.0	93.0	123544
	11	0	1.083	0.374	0.405	308.0	113.0	11611
	12	0	1.090	0.867	0.945	383.0	138.0	1423
	13	0	2.138	0.145	0.310	179.0	131.0	98779
	14	0	2.140	0.264	0.565	232.0	158.0	20031
Acciaio 1045	15	0	2.143	0.098	0.210	147.0	116.0	545840
	16	0	2.145	0.145	0.311	179.0	132.0	101000
	17	0	2.157	0.261	0.563	234.0	159.0	16887
	18	0	2.182	0.643	1.403	289.0	202.0	1759
	19	0	4.264	0.144	0.614	139.0	179.0	19769
	20	0	10.973	0.037	0.406	45.0	165.0	66808
	21	90	0.520	0.410	0.213	364.0	149.0	5260
	22	90	0.547	0.212	0.116	281.0	94.0	58525
	23	90	1.068	0.192	0.205	289.0	148.0	49143
	24	90	1.073	0.192	0.206	285.0	145.0	64652
	25	90	1.088	0.137	0.149	232.0	107.0	139171
	26	90	1.100	0.371	0.408	377.0	191.0	5119
	27	90	2.088	0.147	0.307	250.0	167.0	34718
	28	90	2.130	0.100	0.213	190.0	131.0	613554
	29	90	2.130	0.146	0.311	272.0	166.0	38925
	30	90	2.140	0.264	0.565	345.0	204.0	5262

Per i dati sperimentali relativi a carichi non proporzionali (provini No. 21-30), Fatemi e Socie (Fatemi, 1988) hanno misurato i valori dell'angolo tra la normale al piano di nucleazione della fessura e la normale al piano di frattura (δ_{exp}). Poiché, in accordo con l'Eq. (3.3), tale angolo dipende dal coefficiente efficace di Poisson, i tre differenti metodi presentati in precedenza vengono ora applicati. In *Tabella 3.4* vengono riportati i valori teorici di tale angolo insieme ai valori sperimentali, δ_{exp} . Più precisamente, δ_A , δ_n e δ_l sono determinati impiegando $\nu_{eff} = \nu_{eff,A}$, $\nu_{eff} = \nu_{eff,n}$ e $\nu_{eff} = \nu_{eff,l}$, rispettivamente.

Tabella 3.4 Valori sperimentali (δ_{exp}) e teorici (δ_A , δ_n e δ_l) dell'angolo tra la normale al piano di nucleazione e la normale al piano di frattura relativi ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	δ_{exp} [°]	δ_A [°]	δ_n [°]	δ_l [°]
	1	-	36.58	34.69	43.02
	2	-	39.30	36.24	42.97
	3	-	41.04	40.64	43.97
	4	-	38.04	35.77	42.96
	5	-	45.03	45.03	46.35
	6	-	38.65	34.59	42.99
	7	-	38.48	36.25	42.98
	8	-	36.86	34.49	42.95
	9	-	41.15	40.75	44.06
	10	-	38.05	36.25	42.98
	11	-	40.76	40.76	44.07
	12	-	45.26	45.26	46.55
	13	-	38.51	36.27	43.03
	14	-	41.16	40.76	44.04
Acciaio	15	-	36.86	34.49	42.96
1045	16	-	39.35	36.27	43.03
	17	-	40.74	40.34	44.03
	18	-	45.46	45.46	46.72
	19	-	40.21	39.80	43.89
	20	-	39.40	36.78	43.09
	21	45	40.54	40.13	43.88
	22	45	38.47	35.77	42.95
	23	45	36.71	34.80	42.94
	24	45	37.16	34.80	42.94
	25	45	36.06	34.61	43.02
	26	45	41.98	40.02	43.76
	27	0	36.26	34.28	42.97
	28	0	35.47	34.48	43.00
	29	0	35.30	34.29	42.98
	30	0	38.99	38.99	43.84

In generale, è possibile osservare una buona correlazione tra i dati sperimentali e i risultati numerici, soprattutto impiegando il coefficiente efficace di Poisson $\nu_{eff,l} = 0.5$, eccetto per i provini No. 27-30. Infatti, per tali provini, i picchi della tensione normale e di quella tangenziale non coincidono con i corrispondenti picchi delle deformazioni (Fatemi, 1988); pertanto, poiché la determinazione del piano di frattura proposta risulta correlata alle direzioni principali di deformazione, mentre il piano di propagazione della fessura è sperimentalmente connesso alle direzioni principali di tensione, il confronto tra i risultati numerici e i dati sperimentali non è soddisfacente per tali provini.

Figura 3.8 mostra la vita a fatica sperimentale, $N_{f,exp}$, in funzione dell'ampiezza della deformazione equivalente relativa al piano critico, $\varepsilon_{eq,a}$ (Eq. (3.13)) e, poiché tale ampiezza è funzione del coefficiente efficace di Poisson, i risultati sono riportati al variare del metodo adottato per calcolare il valore di tale coefficiente. La curva continua corrisponde alla formula sperimentale di Manson-Coffin per il caso di trazione ciclica monoassiale (Eq. (3.4)).

In generale, si osserva una buona correlazione tra i dati sperimentali e i risultati numerici, poiché i risultati numerici si trovano molto prossimi alla curva sperimentale.

I confronti in termini di vita a fatica tra i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, e i risultati teorici, $N_{f,cal}$, vengono riportati in *Figura 3.9*. In particolare, per analizzare l'influenza del coefficiente efficace di Poisson relativamente alla stima della vita a fatica, i tre metodi descritti in precedenza vengono utilizzati per calcolare tale coefficiente.

I confronti tra i dati sperimentali e i risultati numerici sono abbastanza soddisfacenti, poiché i risultati ottenuti risultano generalmente contenuti nella banda di dispersione 3 (cioè $N_{f,cal}/N_{f,exp}$ è compreso tra 0.33 e 3), indipendentemente dal grado di non proporzionalità del carico e dal valore di ν_{eff} adottato, e più precisamente:

- (i) per $\nu_{eff} = \nu_{eff,A}$, l'83% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3;

(ii) per $\nu_{eff} = \nu_{eff,n}$, circa l'87% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3;

(iii) per $\nu_{eff} = \nu_{eff,l}$, il 53% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3.

In particolare, da tale confronto emerge che risultati più precisi si hanno impiegando il coefficiente efficace di Poisson calcolato per via numerica, $\nu_{eff,n}$.

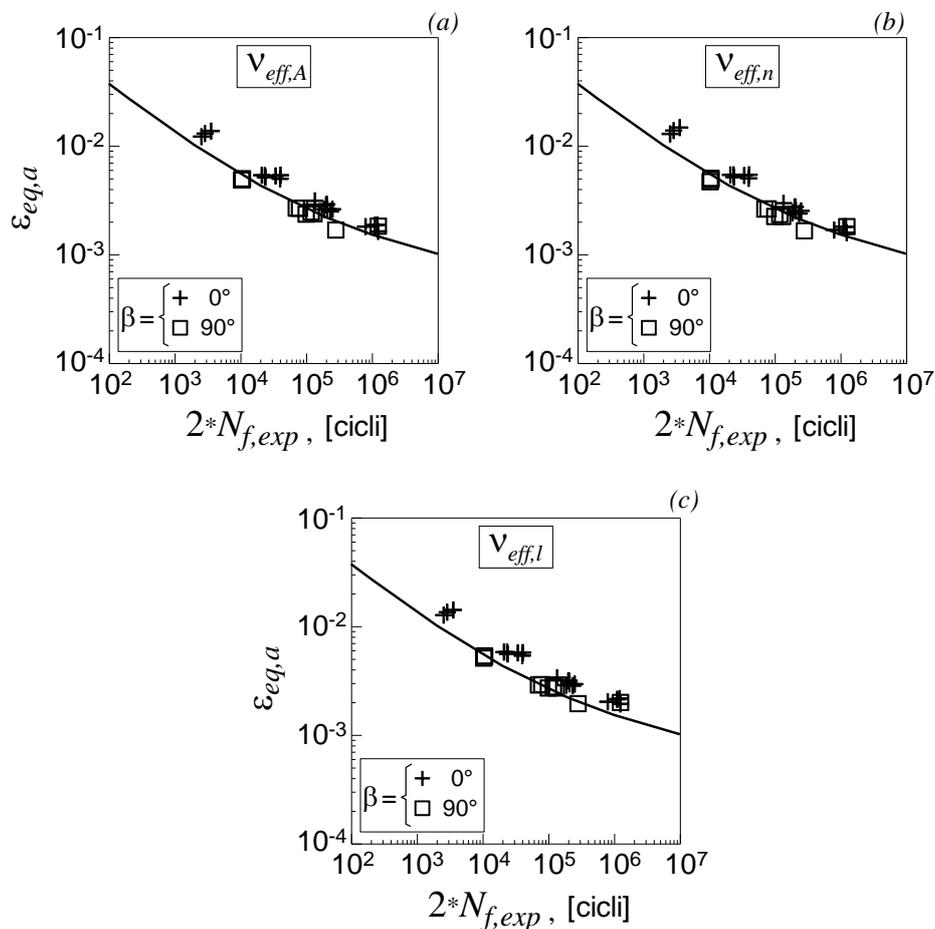


Figura 3.8 Vita a fatica sperimentale, $N_{f,exp}$, in funzione dell'ampiezza della deformazione equivalente, $\varepsilon_{eq,a}$ (Eq. (3.13)), al variare del valore del coefficiente efficace di Poisson adottato: $\nu_{eff} = \nu_{eff,A}$ (a); $\nu_{eff} = \nu_{eff,n}$ (b); $\nu_{eff} = \nu_{eff,l}$ (c). La linea continua corrisponde all'Eq. (3.4).

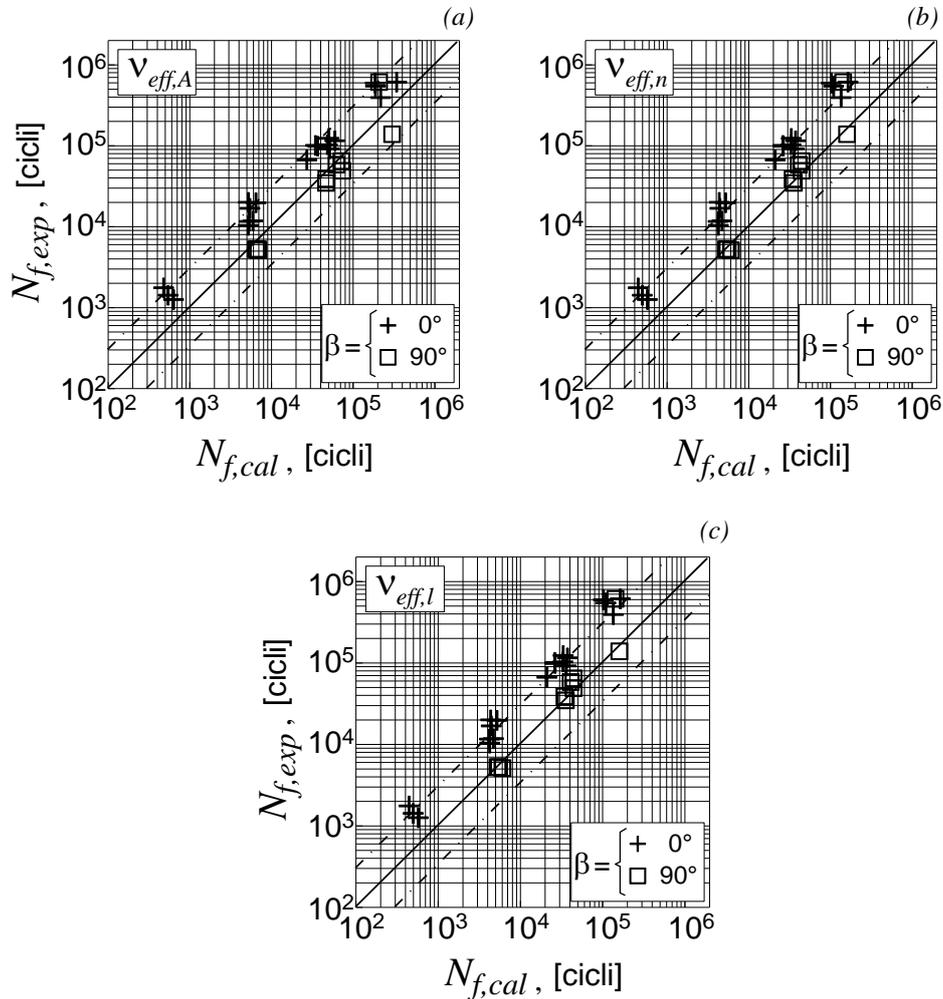


Figura 3.9 Acciaio 1045: confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, per: $v_{eff} = v_{eff,A}$ (a); $v_{eff} = v_{eff,n}$ (b); $v_{eff} = v_{eff,l}$ (c).

Tale tendenza è confermata dai valori dell'errore quadratico medio, T_{RMS} , riportati in Figura 3.10 e determinati impiegando il metodo dell'errore dello scarto quadratico medio (Łagoda, 2014) presentato al Paragrafo 2.3.2, e qui ripreso.

L'analisi dei risultati in Figura 3.10(a) indica, quindi, che la maggiore precisione viene raggiunta impiegando il coefficiente efficace di Poisson valutato attraverso le analisi numeriche, essendo in questo caso il valore dell'errore

quadratico medio il più basso e pari a 2.19. Al contrario, assumendo $\nu_{eff,l} = 0.5$, valore frequentemente impiegato in letteratura, il valore di T_{RMS} è più alto e pari a 2.87.

I valori dell'errore quadratico medio, T_{RMS} , ricavati impiegando l'iniziale formulazione del criterio per basso/medio numero di cicli riportata in (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c) sono rappresentati in *Figura 3.10(b)*. Anche in questo caso, si ottiene una precisione maggiore utilizzando $\nu_{eff,n}$, essendo il valore di T_{RMS} pari a 2.25, valore maggiore rispetto a quello corrispondente dedotto applicando il criterio proposto nella presente Tesi.

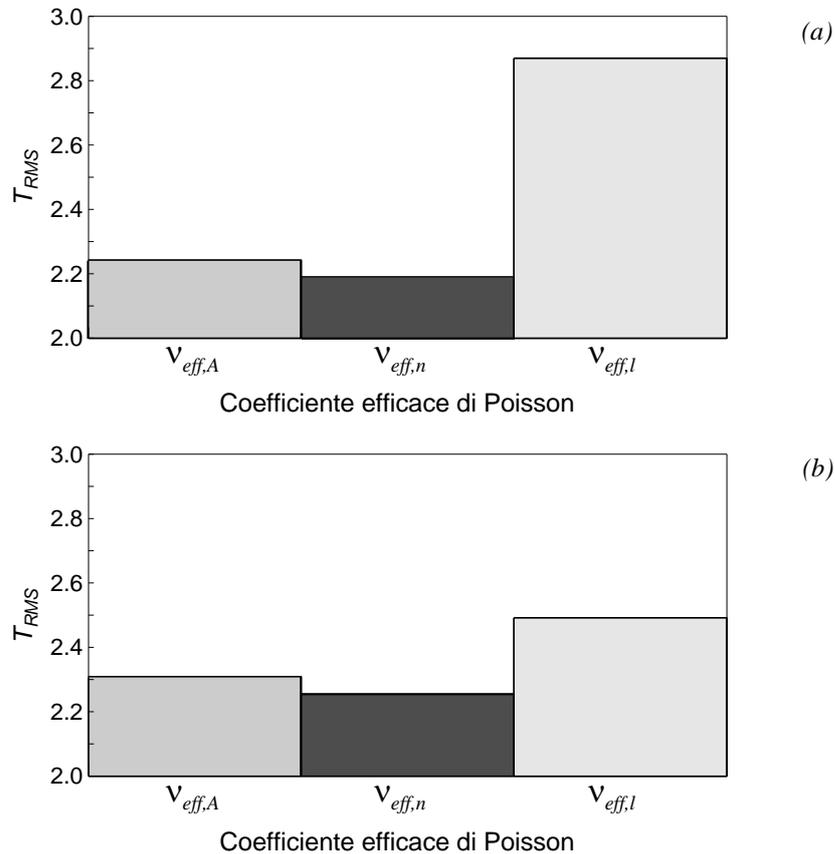


Figura 3.10 Errore quadratico medio T_{RMS} applicando: il criterio proposto (a); la formulazione originale del criterio riportata in (Carpinteri, 2014a; Carpinteri, 2014b; Carpinteri, 2014c) (b).

Al fine di validare ulteriormente il criterio proposto vengono considerati altri dati sperimentali di letteratura, relativi a prove di fatica biassiali eseguite in controllo di deformazione. Si considera, in particolare, per la verifica a fatica il coefficiente efficace di Poisson $\nu_{eff,n}$ ottenuto mediante analisi numeriche, in quanto per l'acciaio 1045 ha fornito risultati maggiormente precisi rispetto a quelli ottenuti impiegando $\nu_{eff,A}$ e $\nu_{eff,l}$.

I dati sperimentali analizzati sono relativi a provini tubolari lisci realizzati in: acciaio AISI 304 (Socie, 1987), S45C (Kim, 1999; Susmel, 2009a) e 45 (Shang, 2000; Shang, 2007).

Tutti i provini analizzati sono soggetti a carichi sinusoidali, sincroni, in fase e non, e lo stato deformativo applicato risulta:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z,a} \sin(\omega_z t) + \varepsilon_{z,m} \quad (3.21a)$$

$$\gamma_{zt} = \gamma_{zt,a} \sin(\omega_{zt} t - \beta) + \gamma_{zt,m} \quad (3.21b)$$

dove $\varepsilon_{z,m}$ è il valore medio della deformazione normale longitudinale (assiale) e $\gamma_{zt,m}$ è il valore medio della deformazione tangenziale.

Le proprietà meccaniche e a fatica (per il caso di trazione e torsione ciclica monoassiale) dei materiali esaminati sono riportate in *Tabella 3.5* e *Tabella 3.6*, rispettivamente.

I dettagli relativi alle condizioni di carico analizzate sono riportati in *Tabella 3.7*, dove $N_{f,exp}$ indica il numero di cicli di carico sperimentale a rottura.

Tabella 3.5 Proprietà meccaniche dei materiali analizzati.

Materiale	E [MPa]	G [MPa]	σ_y [MPa]	ν_e [-]
Acciaio AISI 304 (Socie, 1987)	183000	82800	325	0.29
Acciaio S45C (Kim, 1999; Susmel, 2009a)	186000	70600	496	0.28
Acciaio 45 (Shang, 2000; Shang, 2007)	190000	79000	370	0.30

Tabella 3.6 Proprietà a fatica dei materiali analizzati.

Materiale	σ'_f [MPa]	b [-]	ε'_f [-]	c [-]	τ'_f [MPa]	b_0 [-]	γ'_f [-]	c_0 [-]
Acciaio AISI 304 (Socie, 1987)	1000	-0.114	0.1710	-0.402	709	-0.121	0.413	-0.353
Acciaio S45C (Kim, 1999; Susmel, 2009a)	923	-0.099	0.359	-0.519	685	-0.120	0.198	-0.360
Acciaio 45 (Shang, 2000; Shang, 2007)	843	-0.105	0.327	-0.546	559	-0.108	0.496	-0.469

Tabella 3.7 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	β [°]	$\gamma_{z,a} / \varepsilon_{z,a}$	$\varepsilon_{z,a}$ [%]	$\varepsilon_{z,m}$ [%]	$\gamma_{z,a}$ [%]	$\gamma_{z,m}$ [%]	$N_{f,exp}$ [cicli]
Acciaio AISI 304	1	0	1.586	0.145	0.000	0.230	0.000	398000
	2	0	1.720	0.250	0.000	0.430	0.000	52950
	3	90	1.650	0.200	0.000	0.30	0.000	45000
	4	90	1.743	0.350	0.000	0.610	0.000	3645
	5	90	1.750	0.200	0.000	0.350	0.000	50000
Acciaio S45C	6	0	0.456	0.900	0.000	0.410	0.000	1181
	7	0	0.867	0.600	0.000	0.520	0.000	2278
	8	0	0.903	0.720	0.000	0.650	0.000	1366
	9	0	0.911	0.900	0.000	0.820	0.000	568
	10	0	1.806	0.360	0.000	0.650	0.000	4647
	11	22.5	0.456	1.800	0.000	0.820	0.000	215
	12	45	0.456	1.800	0.000	0.820	0.000	191
	13	45	0.833	0.600	0.000	0.550	0.000	1631
	14	90	0.456	0.900	0.000	0.410	0.000	678
	15	90	0.833	0.600	0.000	0.550	0.000	1617
Acciaio 45	16	0	1.730	0.566	0.000	0.979	0.000	1085
	17	0	1.730	0.566	0.566	0.979	0.979	1279
	18	45	1.730	0.566	0.000	0.979	0.000	681
	19	45	1.730	0.566	0.566	0.979	0.979	664
	20	45	1.733	0.800	0.000	1.386	0.000	278
	21	60	1.730	0.566	0.000	0.979	0.000	544
	22	90	0.866	0.800	0.000	0.693	0.000	448
	23	90	0.866	0.800	0.800	0.693	0.000	440
	24	90	0.866	0.800	0.000	0.693	0.693	450
	25	90	1.733	0.800	0.000	1.386	0.000	384
	26	90	1.733	0.800	0.800	1.386	0.000	426
	27	90	1.733	0.800	0.000	1.386	1.386	406
	28	90	1.733	0.800	0.800	1.386	1.386	455
	29	90	3.465	0.400	0.000	1.386	0.000	591
	30	90	3.465	0.400	0.400	1.386	0.000	670
	31	90	3.465	0.400	0.000	1.386	1.386	650

I confronti in termini di vita a fatica tra i dati sperimentali e i risultati numerici sono soddisfacenti (*Fig. 3.11*), essendo i risultati in generale contenuti nella banda di dispersione 3, indipendentemente dal grado di non proporzionalità del carico, e più precisamente:

(i) per l'acciaio AISI 304, il 60% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3 e il 40% nella banda di dispersione 2;

(ii) per l'acciaio S45C, il 100% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3 e il 70% nella banda di dispersione 2;

(iii) per l'acciaio 45, il 100% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 2.

Infine, esprimendo l'affidabilità del criterio in termini statistici mediante l'errore quadratico medio, si osserva una buona correlazione tra i dati sperimentali e i risultati numerici (*Fig. 3.12*), soprattutto nel caso dell'acciaio 45 essendo il valore di T_{RMS} molto inferiore a 2.

In conclusione, è possibile affermare che il criterio proposto permette una rigorosa valutazione della vita a fatica di componenti metallici e rappresenta quindi un utile strumento di progettazione a fatica.

Infine, è importante sottolineare che il criterio per basso/medio numero di cicli qui presentato non tiene conto dell'effetto di tensioni medie e di deformazioni medie. In particolare, al fine di tener conto della presenza di valori medi di tensione e deformazione, che inevitabilmente influenzano la vita a fatica del componente strutturale, un ulteriore sviluppo del criterio sarà rappresentato dall'implementazione dell'ampiezza della deformazione equivalente sul piano critico, secondo quanto proposto da Smith, Watson e Topper (Smith, 1970).

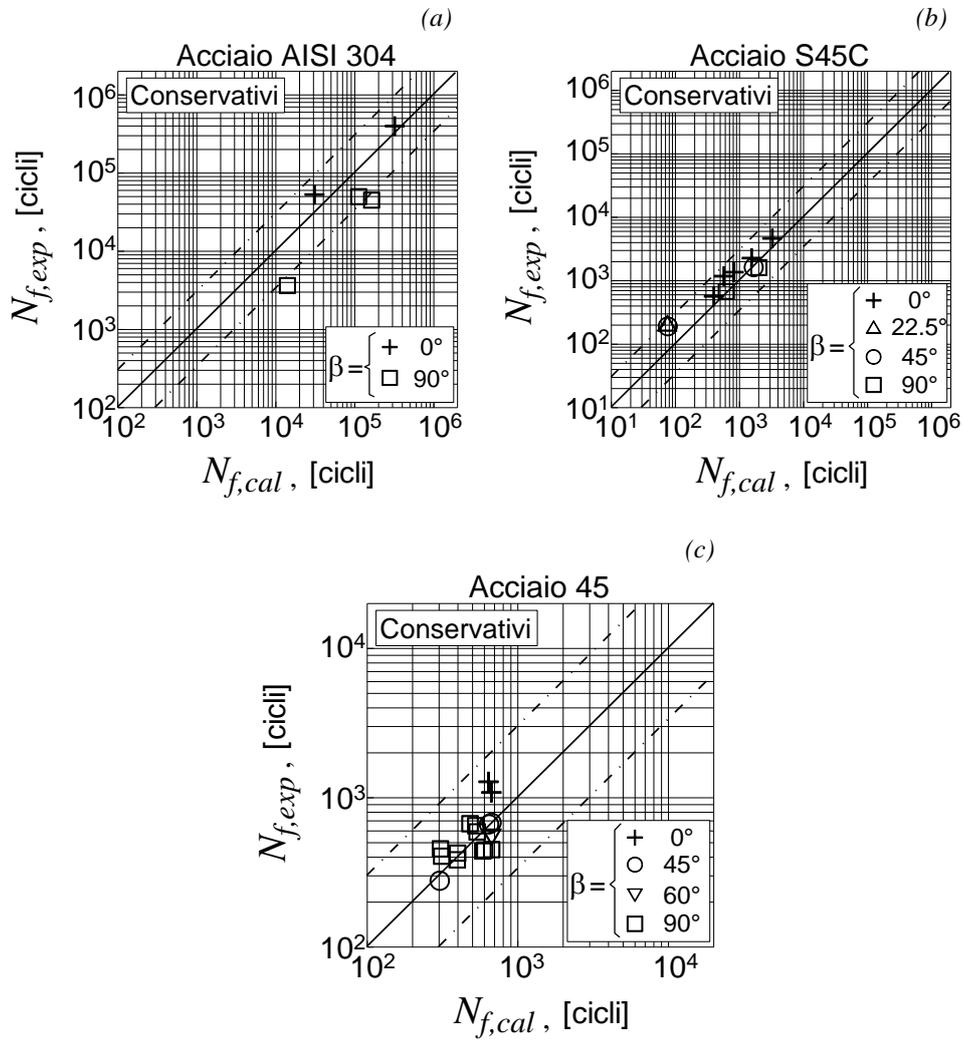


Figura 3.11 Confronto, in termini di vita a fatica, tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, per: acciaio AISI 304(a); acciaio S45C (b); acciaio 45 (c).

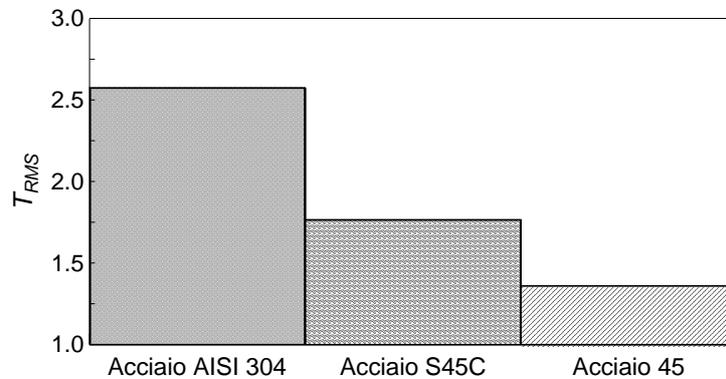


Figura 3.12 Errore quadratico medio T_{RMS} relativo ai materiali analizzati.

3.4 L'effetto della presenza di intagli

La presenza di intagli o, più in generale, di discontinuità geometriche nei componenti strutturali comporta l'insorgenza di significativi gradienti di tensione che influenzano sensibilmente la loro resistenza a fatica. Uno degli obiettivi della presente Tesi è quello di estendere la formulazione del criterio per basso/medio numero di cicli (Paragrafo 3.2) al caso di componenti strutturali intagliati.

Il criterio, riformulato implementando il concetto del volume di controllo proposto da Lazzarin e collaboratori (Lazzarin, 2004; Berto, 2011; Berto, 2014), viene validato attraverso dati sperimentali di letteratura, relativi a provini con intaglio a V in lega di titanio grado 5 (Berto, 2015).

3.4.1 Formulazione per componenti strutturali intagliati

La presenza di un intaglio o, più in generale, di una discontinuità geometrica in un componente strutturale produce un campo di tensione multiassiale nell'intorno dell'intaglio anche quando la sollecitazione applicata è monoassiale. La verifica a fatica in tali condizioni viene generalmente eseguita considerando la componente di tensione ortogonale alla bisettrice dell'intaglio stesso (Taylor, 1999).

La complessità del campo di tensione è ulteriormente incrementata dalla presenza di sollecitazioni multiassiali e in questa situazione la tensione ortogonale alla bisettrice dell'intaglio non è più sufficiente da sola a predire correttamente la vita a fatica del componente.

La progettazione a fatica multiassiale in presenza di componenti intagliati è stata affrontata da diversi ricercatori secondo metodologie concettualmente molto diverse tra loro (Lazzarin, 2001; Atzori, 2003; Susmel, 2004; Atzori 2005; Susmel, 2008; Capetta, 2011; Meneghetti, 2013; Lazzarin, 2014; Louks, 2014): tutt'oggi il problema è ancora aperto e lascia spazio a nuove proposte (un confronto tra alcuni dei criteri disponibili in letteratura per la verifica a fatica è stato recentemente condotto sia da Niesłony e collaboratori (Niesłony, 2008) sia da Fatemi e collaboratori (Fatemi, 2011), analizzando numerosi dati sperimentali relativi a provini intagliati).

Il problema della verifica a fatica di componenti intagliati può essere scomposto in tre sottoproblemi: determinazione del punto critico in cui eseguire la verifica a fatica, stima dello stato tensionale/deformativo in corrispondenza del punto critico e previsione della vita a fatica.

Il primo sottoproblema si presenta molto complesso poiché la posizione del punto critico risulta influenzata dalla combinazione di un elevato numero di parametri del materiale, della geometria dell'intaglio e del meccanismo di propagazione della fessura.

Per quanto riguarda la stima dello stato tensionale/deformativo locale in corrispondenza del punto critico è possibile ricorrere ad analisi numeriche agli elementi finiti oppure ad approcci analitici in grado di stimare le componenti di tensione o deformazione, note le tensioni nominali (metodo di Hoffmann e Seeger (Hoffmann, 1989)) oppure note le sollecitazioni applicate (metodo di Köttingen, Barkey e Socie (Köttingen, 1995)). Seppure tali approcci forniscano risultati soddisfacenti nel caso di sollecitazioni multiassiali relative a provini cilindrici intagliati, non è ancora possibile confermare la loro affidabilità in presenza di geometrie differenti (Susmel, 2009a).

Infine, resta da affrontare il problema della stima della vita a fatica. Lo stato dell'arte mostra come in letteratura siano disponibili differenti criteri per la stima della vita a fatica di componenti intagliati in presenza di carichi multiassiali ciclici e basso/medio numero di cicli (Bentachfine, 1999; Fatemi, 2004; Susmel 2009b).

Alla luce di quanto brevemente presentato, l'oggetto del presente Paragrafo è quello di presentare l'estensione del criterio per basso/medio numero di cicli, formulato per provini lisci, al caso di componenti strutturali intagliati. Tale

estensione viene formulata sfruttando il concetto di volume di controllo, proposto da Lazzarin e collaboratori nell'ambito del metodo Strain Energy Density (SED) (Lazzarin, 2004; Berto, 2011; Berto, 2014). In particolare, al fine di validare sperimentalmente la formulazione del criterio per basso/medio numero di cicli esteso al caso di componenti strutturali intagliati, vengono esaminati alcuni dati sperimentali, recentemente pubblicati in letteratura (Berto, 2015).

È importante ricordare che nel 1989 Ellyin introdusse il concetto di Strain Energy Density proponendo, come parametro per quantificare il danno a fatica, una combinazione della densità di energia di deformazione sia elastica che plastica (Ellyin, 1989; Ellyin, 1997). Park e Nelson hanno, invece, impiegato il concetto di densità di energia di deformazione deviatorica, calcolata in corrispondenza della radice dell'intaglio, per valutare il comportamento a fatica di provini indeboliti da intagli poco severi soggetti a carichi multiassiali (Park, 2000). I criteri puntuali come quelli riportati sopra non possono essere impiegati nel caso di intagli severi. Al fine di superare tale problema, Lazzarin e collaboratori hanno proposto un metodo basato sull'energia di deformazione locale, mediata su un volume di controllo, per eseguire la verifica a fatica di provini con intagli severi a V soggetti a sollecitazioni sia uniassiali (Lazzarin, 2001) sia multiassiali (Lazzarin, 2004; Berto, 2011; Berto, 2014). In particolare, il metodo Strain Energy Density (SED) è basato sul concetto di volume strutturale elementare di Neuber (Neuber, 1958) e considera come parametro critico per la verifica a fatica il valore medio della densità di energia di deformazione, valutato su un volume di controllo che circonda la radice dell'intaglio. La crisi a fatica del componente strutturale intagliato avviene, quindi, quando il valore di tale energia uguaglia un valore critico, caratteristico del materiale.

In accordo con il metodo SED e considerando l'intaglio a V riportato in *Figura 3.13*, è possibile definire i raggi R_1 e R_3 del volume di controllo, relativi alle condizioni di carico di Modo I e di Modo III, rispettivamente, come segue:

$$R_1 = \left(\sqrt{2e_1} \cdot \frac{\Delta K_{IA}}{\Delta \sigma_{IA}} \right)^{(1/1-\lambda_1)} \quad (3.22a)$$

$$R_3 = \left(\sqrt{\frac{e_3}{1+\nu_e}} \cdot \frac{\Delta K_{3A}}{\Delta \sigma_{3A}} \right)^{(1/\lambda_3)} \quad (3.22b)$$

dove e_1 ed e_3 sono due parametri che riassumono la dipendenza dalla geometria dell'intaglio (Berto, 2015), ν_e è il coefficiente elastico di Poisson, e λ_1 ed λ_3 sono gli autovalori di Modo I e di Modo III, rispettivamente. Inoltre, i raggi di controllo sono funzioni dei valori medi dei fattori di intensità degli sforzi relativi a provini intagliati (ΔK_{1A} per il Modo I e ΔK_{3A} per il Modo III) e delle resistenze a fatica di provini lisci in presenza di alto numero di cicli di carico ($\Delta \sigma_{1A}$ per il Modo I e $\Delta \sigma_{3A}$ per il Modo III); tali grandezze sono tutte riferite allo stesso numero di cicli a rottura (N_A).

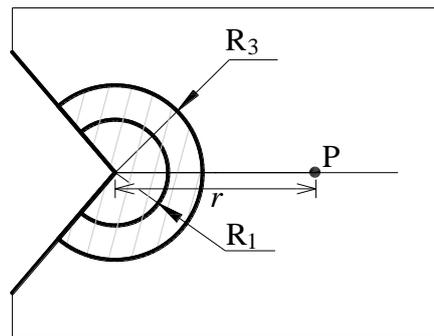


Figura 3.13 Raggi R_1 e R_3 del volume di controllo relativo a un intaglio a V.

Implementando il concetto dei raggi del volume di controllo nel criterio proposto nel presente Capitolo, la verifica a fatica viene eseguita in corrispondenza del punto critico P , situato ad una distanza r dalla radice dell'intaglio (Fig. 3.13).

Tale distanza r , misurata lungo la bisettrice dell'intaglio, viene proposta essere calcolata in funzione del raggio medio del volume di controllo, R_m , ottenuto mediando i valori del raggio del volume di controllo relativo al meccanismo di propagazione della fessura di Modo I, R_1 , e quello relativo al Modo III, R_3 :

$$r = -(0.221)^{2-1.484} \cdot R_m + 11.3R_m \quad (3.23)$$

dove λ è il rapporto di biassialità, definito come il rapporto tra le ampiezze della tensione tangenziale e della tensione normale applicate.

Nota la posizione del punto critico, in corrispondenza del quale eseguire la verifica a fatica, è necessario determinare lo stato deformativo locale. In particolare, il tensore di deformazione in corrispondenza del punto critico P viene calcolato attraverso analisi numeriche agli elementi finiti.

Le analisi condotte si basano su una modellazione tridimensionale del provino soggetto a prove di fatica uniassiali e biassiali di trazione e torsione ciclica in controllo di carico. Tali analisi, condotte impiegando il software di calcolo *Straus7*, versione 2.3, risultano di tipo dinamico lineare, poiché l'implementazione del concetto del volume di controllo nel criterio proposto tiene già conto di eventuali plasticizzazioni del materiale, senza dover eseguire analisi di tipo non lineare.

Per condizioni di simmetria, viene modellato solo metà provino. In particolare, il modello è realizzato impiegando elementi tridimensionali isotropi a 6 e a 8 nodi e la geometria è la stessa del provino soggetto alle prove di fatica in esame (*Fig. 3.14*). Il modello è vincolato alla base inferiore (che rappresenta il piano di simmetria del provino) allo spostamento verticale e tangenziale (*Fig. 3.15*; i segmenti in rosa indicano la direzione degli spostamenti nodali impediti).

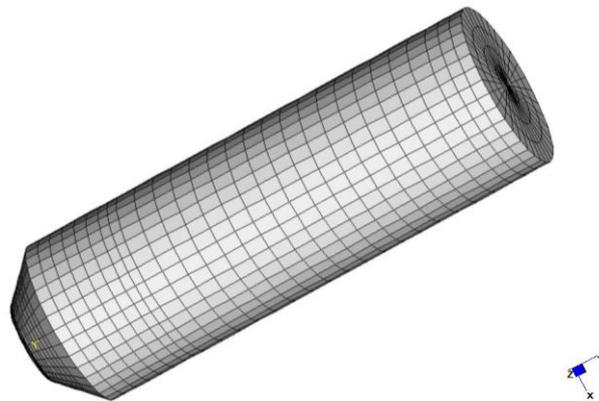


Figura 3.14 Modello numerico tridimensionale realizzato impiegando *Straus7*.

Per gli elementi tridimensionali costituenti il modello si considerano, in fase di modellazione, le seguenti proprietà meccaniche del materiale con cui è realizzato il provino: modulo elastico, E , e coefficiente elastico di Poisson, ν_e .

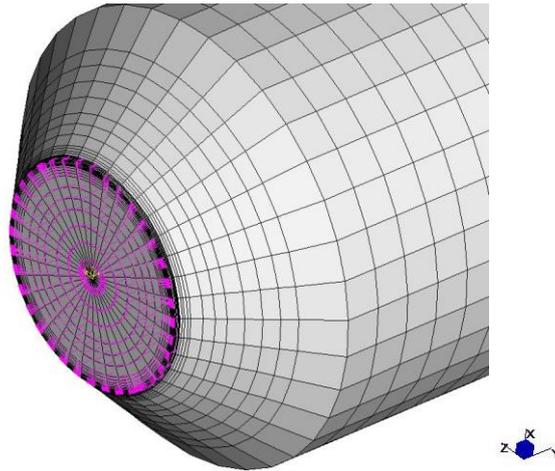


Figura 3.15 Vincoli alla base inferiore del modello numerico tridimensionale realizzato impiegando Straus7.

L'analisi dinamica lineare è condotta considerando due condizioni di carico distinte, al fine di simulare sia le prove di fatica uniassiali sia quelle biassiali in esame. In particolare, tale analisi viene eseguita imponendo, sulla base superiore del provino, delle tensioni normali e tangenziali agenti sulle facce libere degli elementi tridimensionali.

Noto lo stato deformativo in corrispondenza del punto critico posto ad una distanza r dalla radice dell'intaglio, la stima della vita a fatica viene, poi, eseguita impiegando il criterio per basso/medio numero di cicli proposto al Paragrafo 3.2.

3.4.2 Validazione della formulazione proposta

La validazione della formulazione proposta viene eseguita considerando alcuni dati sperimentali relativi a provini con un severo intaglio a V realizzati in lega di titanio grado 5 (Ti-6Al-4V), soggetti a prove di fatica uniassiali e biassiali in controllo di carico (Berto, 2015).

In particolare, ciascun provino cilindrico intagliato (*Figura 3.16*) presenta un intaglio a V di profondità pari a 6 mm e angolo di apertura pari a 90° , mentre il raggio della radice dell'intaglio è inferiore a 0.1 mm.

I provini sono soggetti a carichi sinusoidali, sincroni, in fase e non, e lo stato tensionale applicato risulta:

$$\sigma_z = \sigma_{z,a} \sin(\omega t) \quad (3.24a)$$

$$\tau_{zt} = \tau_{zt,a} \sin(\omega t - \beta) \quad (3.24b)$$

dove $\sigma_{z,a}$ è l'ampiezza della tensione normale longitudinale (assiale) e $\tau_{zt,a}$ è l'ampiezza della tensione tangenziale. Inoltre, ω = pulsazione e β = angolo di fase tra σ_z e τ_{zt} .

Tutti i dettagli relativi alle prove sperimentali condotte da Berto e collaboratori sono riportati nel lavoro (Berto, 2015).

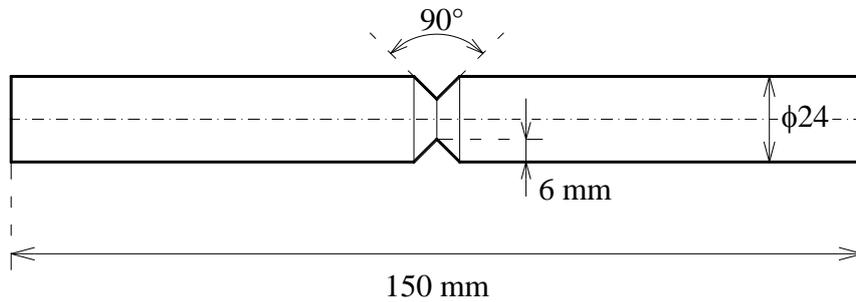


Figura 3.16 Geometria del provino con intaglio a V (Berto, 2015).

Le proprietà meccaniche e a fatica (per il caso di trazione e torsione ciclica monoassiale) del materiale esaminato sono riportate in *Tabella 3.8* e *Tabella 3.9*, rispettivamente. Si noti che i parametri a fatica per il caso di trazione ciclica monoassiale sono riportati in (Basan, 2011; Bourago, 2012), mentre i parametri corrispondenti per il caso di torsione ciclica monoassiale sono valutati impiegando il criterio di von Mises (Kim, 2002).

Tabella 3.8 Proprietà meccaniche del materiale analizzato.

Materiale	E [MPa]	G [MPa]	ν_e [-]
Lega titanio Ti-6Al-4V (Berto, 2015)	110000	42308	0.30

Tabella 3.9 Proprietà a fatica del materiale analizzato.

Materiale	σ'_f [MPa]	b [-]	ε'_f [-]	c [-]	τ'_f [MPa]	b_0 [-]	γ'_f [-]	c_0 [-]
Lega titanio Ti-6Al-4V (Berto, 2015)	1445	-0.095	0.350	-0.690	834	-0.095	0.606	-0.690

I dettagli relativi alle condizioni di carico analizzate sono riportati in *Tabella 3.10*, dove $N_{f,exp}$ indica il numero di cicli di carico sperimentale a rottura.

Per definire il punto critico in cui eseguire la verifica a fatica, è necessario calcolare i valori dei raggi R_1 e R_3 del volume di controllo in accordo con l'*Eq. (3.22)*. In particolare, tali valori vengono determinati per i dati sperimentali analizzati assumendo:

- (i) i parametri e_1 ed e_3 pari a 0.146 e 0.310, rispettivamente;
- (ii) il coefficiente elastico di Poisson $\nu_e = 0.3$ (*Tab. (3.8)*);
- (iii) gli autovalori λ_1 ed λ_3 pari a 0.545 e 0.667, rispettivamente;
- (iv) i valori medi dei fattori di intensità degli sforzi relativi a provini intagliati $\Delta K_{1A} = 452 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.445}$ (Modo I) e $\Delta K_{3A} = 1216 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.333}$ (Modo III) (in corrispondenza di numero di cicli a rottura $N_A = 2 \cdot 10^6$);
- (v) le resistenze a fatica di provini lisci in presenza di alto numero di cicli $\Delta \sigma_{1A} = 950 \text{ MPa}$ (Modo I) e $\Delta \sigma_{3A} = 776 \text{ MPa}$ (Modo III) (in corrispondenza di numero di cicli a rottura $N_A = 2 \cdot 10^6$).

Di conseguenza, i raggi R_1 e R_3 del volume di controllo sono uguali a 0.051 mm e 0.837 mm, rispettivamente.

Tabella 3.10 Condizioni di carico relative ai dati sperimentali analizzati.

Materiale	No.	β [°]	λ	$\sigma_{z,a}$ [MPa]	$\tau_{zt,a}$ [MPa]	$N_{f,exp}$ [cicli]
	1	0	0	160.0	-	99067
	2	0	0	160.0	-	107540
	3	0	0	200.0	-	24772
	4	0	0	200.0	-	33670
	5	0	0	230.0	-	11164
	6	0	0	230.0	-	13456
	7	0	∞	-	380.0	46496
	8	0	∞	-	380.0	65569
	9	0	∞	-	400.0	19520
	10	0	∞	-	420.0	7518
	11	0	∞	-	460.0	1053
	12	0	0.6	130.0	78.0	137540
	13	0	0.6	140.0	84.0	93785
	14	0	0.6	140.0	84.0	141768
	15	0	0.6	160.0	96.0	67500
	16	0	0.6	160.0	96.0	85000
	17	0	0.6	170.0	102.0	36177
	18	0	0.6	170.0	102.0	43400
	19	0	0.6	190.0	114.0	12668
	20	0	0.6	190.0	114.0	15346
	21	90	0.6	130.0	78.0	182284
	22	90	0.6	130.0	78.0	237488
	23	90	0.6	140.0	84.0	74178
	24	90	0.6	140.0	84.0	91230
	25	90	0.6	170.0	102.0	19789
	26	90	0.6	170.0	102.0	26540
	27	90	0.6	190.0	114.0	10698

Noti i raggi R_1 e R_3 , differenti valori della distanza r (tra la radice dell'intaglio e il punto critico P , in corrispondenza del quale eseguire la verifica a fatica) vengono calcolati a partire dall'Eq. (3.23):

(i) per il caso di sollecitazione uniassiale di trazione (provini No. 1-6), cioè $\lambda = 0$, r è pari a $1.9 \cdot R_m$;

(ii) per il caso di sollecitazione uniassiale di torsione (provini No. 7-11), cioè $\lambda = \infty$, r è pari a $11.3 \cdot R_m$;

(iii) per il caso di sollecitazione di trazione e torsione in fase e non (provini No. 12-27), cioè $\lambda = 0.6$, r è pari a $7.5 \cdot R_m$.

È importante sottolineare che l'Eq. (3.23) proposta nella presente Tesi è ottenuta da una procedura di interpolazione. In particolare, i dati da interpolare

vengono determinati (per alcuni valori di λ relativi ai dati sperimentali riportati in (Berto, 2015)) ottimizzando il seguente indice d'errore, I :

$$I = \frac{\sqrt{(\eta_{N,a})^2 + (\varepsilon_a/\gamma_a)^2 (\eta_{C,a})^2} - \varepsilon_a}{\varepsilon_a} \quad (3.25)$$

essendo le ampiezze ε_a e γ_a definite mediante l'Eq. (3.4) e l'Eq. (3.5), rispettivamente.

Noto lo stato deformativo in corrispondenza del punto critico P (attraverso le analisi numeriche agli elementi finiti descritte nel precedente Paragrafo) e assumendo il coefficiente efficace di Poisson, ν_{eff} , pari a quello elastico, il criterio per basso/medio numero di cicli viene direttamente impiegato per stimare la vita a fatica.

Figura 3.17 mostra il confronto in termini di vita a fatica tra i dati sperimentali, $N_{f,exp}$, e i risultati teorici, $N_{f,cal}$. È possibile osservare che circa l'88% dei risultati è contenuto nella banda di dispersione 3 e circa il 56% nella banda di dispersione 2, e questo si verifica indipendentemente dal tipo di sollecitazione applicata (cioè per prove di fatica sia uniassiali sia biassiali).

Il grafico riportato in *Figura 3.18* rappresenta la vita a fatica sperimentale, $N_{f,exp}$, in funzione dell'ampiezza della deformazione equivalente, $\varepsilon_{eq,a}$ (Eq. (3.13)). La curva continua corrisponde alla formula sperimentale di Manson-Coffin per il caso di trazione ciclica monoassiale (Eq. (3.4)). Il livello di precisione della formulazione proposta per il caso di componenti intagliati può essere dedotto anche dalla *Figura 3.18*, poiché i risultati numerici si trovano molto prossimi alla curva sperimentale.

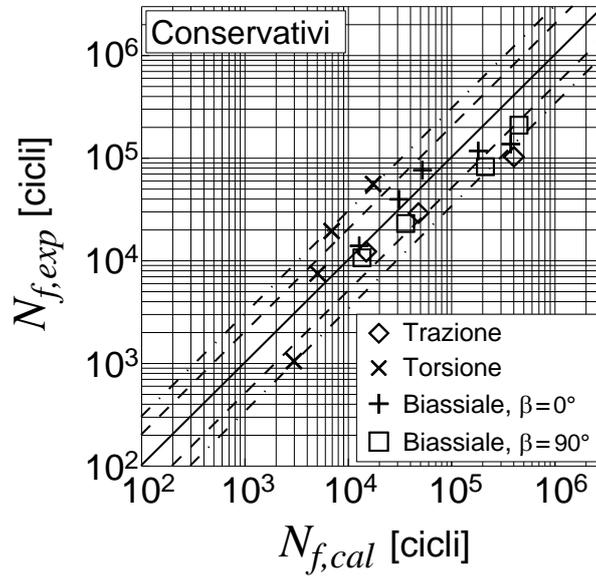


Figura 3.17 Confronto in termini di vita a fatica tra i risultati teorici, $N_{f,cal}$, e i dati sperimentali, $N_{f,exp}$.

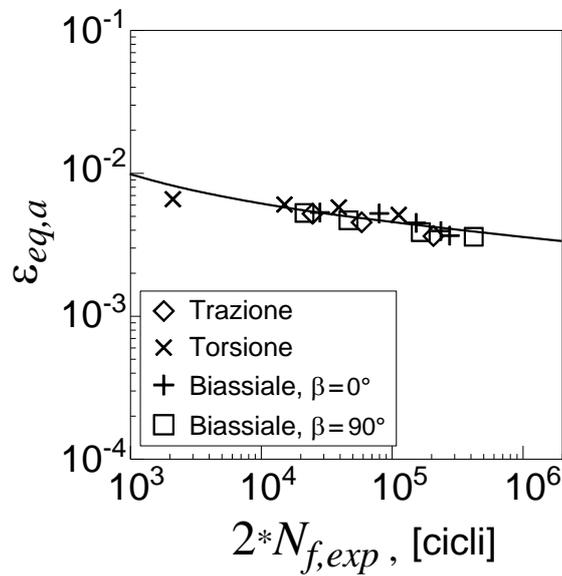


Figura 3.18 Vita a fatica sperimentale, $N_{f,exp}$, in funzione dell'ampiezza della deformazione equivalente, $\epsilon_{eq,a}$ (Eq. (3.13)). La linea continua corrisponde all'Eq. (3.4).

Infine, l'accuratezza del criterio può essere espressa in termini di indice d'errore assoluto (Eq. (3.25))

I risultati ottenuti in termini di frequenze relative vengono riportati in *Figura 3.19* ed è possibile osservare che il valore assoluto dell'indice d'errore I ricade nell'intervallo $0 \leq I \leq 10\%$ per il 69% dei dati sperimentali analizzati.

In conclusione, è possibile affermare che l'accordo tra i dati sperimentali e i risultati numerici è abbastanza soddisfacente e promettente per l'applicazione del criterio a provini caratterizzati da geometrie e condizioni di carico differenti rispetto a quelle qui analizzate.

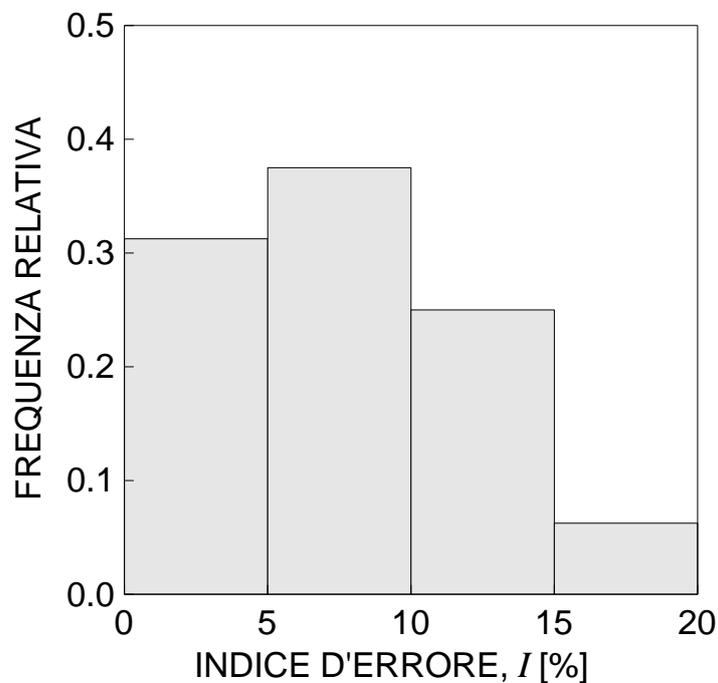


Figura 3.19 Valori della frequenza relativa dell'indice d'errore, I , calcolati applicando il criterio proposto.

3.5 Bibliografia

- Atzori B., Lazzarin P., Meneghetti G. (2003) Fracture mechanics and notch sensitivity. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 257-267.
- Atzori B., Meneghetti G., Susmel L. (2005) Material fatigue properties for assessing mechanical components weakened by notches and defects. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 28, 83-97.
- Basan R., Franulovic M., Prebil I., Crnjarić-Žic N. (2011) Analysis of strain-life fatigue parameters and behaviour of different groups of metallic materials. *International Journal of Fatigue* 33, 484-491.
- Bentachfine S., Pluvinage G., Gilgert J., Azari Z., Bouami D. (1999) Notch effect in low cycle fatigue. *International Journal of Fatigue* 21, 421-430.
- Berto F., Lazzarin P., Yates J.R. (2011) Multiaxial fatigue of V-notched steel specimens: a non-conventional application of the local energy method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 34, 921-943.
- Berto F., Lazzarin P., Tovo R. (2014) Multiaxial fatigue strength of severely notched cast iron specimens. *International Journal of Fatigue* 67, 15-27.
- Berto F., Campagnolo A., Lazzarin P. (2015) Fatigue strength of severely notched specimens made of Ti-6Al-4V under multiaxial loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 38, 503-517.
- Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. (2012) Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. *Mechanics of Solids* 46, 828-838.
- Brown M.W., Miller K.J. (1973) A theory for fatigue failure under multi-axial stress-strain condition. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 187, 745-55.
- Capetta S., Tovo R., Taylor D., Livieri P. (2011) Numerical evaluation of fatigue strength on mechanical notched components under multiaxial loadings. *International Journal of Fatigue* 33, 661-671.
- Carpinteri A., Macha E., Brighenti R., Spagnoli A. (1999) Expected principal stress directions under multiaxial random loading – Part I (Theoretical aspects of the weight function method) e Part II (Numerical simulation and experimental

- assessment through the weight function method). *International Journal of Fatigue* 21, 83-96.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014a) A strain-based multiaxial fatigue criterion connected to the critical plane approach. *Procedia Engineering* 74, 317-320.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014b) Lifetime estimation in the low/medium-cycle regime using the Carpinteri-Spagnoli multiaxial fatigue criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73, 120-127.
- Carpinteri A., Ronchei C., Spagnoli A., Vantadori S. (2014c) Estensione del criterio C-S modificato per fatica a basso/medio numero di cicli. In: *Atti del 43° Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni (AIAS 2014)*, Rimini.
- Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015) Fatigue life estimation for multiaxial low-cycle fatigue regime: the influence of the effective Poisson ratio value. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 79, 77-83.
- Ellyin F. (1989) Cyclic strain energy density as a criterion for multiaxial fatigue failure. In: *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, a cura di M.W. Brown e K.J. Miller, Mechanical Engineering Publications, London, 571-583.
- Ellyin F. (1997) *Fatigue damage, crack growth and life prediction*. Chapman and Hall, Edmonton.
- Fatemi A., Socie D.F. (1988) A critical plane approach to multiaxial fatigue including out-of-phase loading. *Fatigue Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 11, 149-166.
- Fatemi A., Stephens R.I. (1989) Biaxial fatigue of 1045 steel under in-phase and 90 degree out-of-phase loading. In: *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, a cura di E.L. Gail e D.F. Socie, SAE AE14, Warrendale, 121-137.
- Fatemi A., Zeng Z., Plaseied A. (2004) Fatigue behavior and life predictions of notched specimens made of QT and forged microalloyed steels. *International Journal of Fatigue* 26, 663-672.

- Fatemi A., Shamsaei N. (2011) Multiaxial fatigue: an overview and some approximation models for life estimation. *International Journal of Fatigue* 33, 948-958.
- Hoffmann M., Seeger T. (1989) Estimating multiaxial elastic-plastic notch stresses and strains in combined loading. In: *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, a cura di M.W. Brown e K.J. Miller, Mechanical Engineering Publications, London, 3-24.
- Kim K.S., Park J.C., Lee J.W. (1999) Multiaxial fatigue under variable amplitude loads. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 121, 286-293.
- Kim K., Chen X., Han C., Lee H. (2002) Estimation methods for fatigue properties of steels under axial and torsional loading. *International Journal of Fatigue* 24, 783-793.
- Köttgen V.B., Barkey M.E., Socie D.F. (1995) Pseudo Stress and Pseudo Strain Based Approaches to Multiaxial Notch Analysis. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 18, 9981-1006.
- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lazzarin P., Zambardi R. (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. *International Journal of Fracture* 112, 275-298.
- Lazzarin P., Sonsino C.M., Zambardi R. (2004) A notch stress intensity approach to assess the multiaxial fatigue strength of welded tube-to-flange joints subjected to combined loadings. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 27, 127-140.
- Lazzarin P., Campagnolo A., Berto F. (2014) A comparison among some recent energy- and stress-based criteria for the fracture assessment of sharp V-notched components under mode I loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 71, 21-30.
- Louks R., Gerin B., Draper J., Askes H., Susmel L. (2014) On the multiaxial fatigue assessment of complex three-dimensional stress concentrators. *International Journal of Fatigue* 63, 12-24.
- Meneghetti G., Ricotta M., Atzori B. (2013) A synthesis of the push-pull fatigue behaviour of plain and notched stainless steel specimens by using the specific

- heat loss. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 36, 1306-1322.
- Neuber H. (1958) *Theory of Notch Stresses*. Springer-Verlag, Berlin.
- Niesłony A., Sonsino C.M. (2008) *Comparison of some selected multiaxial fatigue assessment criteria*. LBF Report No. FB-234, Fraunhofer Gesellschaft, Darmstadt.
- Papadopoulos I.V. (1998) Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 21, 269-285.
- Park J., Nelson D. (2000) Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life. *International Journal of Fatigue* 22, 23-39.
- Shang D.G., Wang D.J., Yao W.X. (2000) A simple approach to the description of multiaxial cyclic stress-strain relationship. *International Journal of Fatigue* 22, 251-256.
- Shang D.G., Sun G.Q., Yan C.L. (2007) Multiaxial fatigue damage parameter and life prediction for medium-carbon steel based on the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 29, 2200-2207
- Smith K.N., Watson P., Topper T.H. (1970) A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials* 5, 767-778.
- Socie D.F. (1987) Multiaxial fatigue damage models. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 109, 293-298.
- Susmel L. (2004) A unifying approach to estimate the high-cycle fatigue strength of notched components subjected to both uniaxial and multiaxial cyclic loadings. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 27, 391-411.
- Susmel L., Taylor D. (2008) The Modified Wöhler Curve Method applied along with the theory of critical distances to estimate finite life of notched components subjected to complex multiaxial loading paths. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 31, 1047-1064.
- Susmel L. (2009a) *Multiaxial notch fatigue*. Woodhead Publishing Limited, Cambridge.

- Susmel L., Meneghetti G., Atzori B. (2009b) A simple and efficient reformulation of the classical Manson–Coffin curve to predict lifetime under multiaxial fatigue loading – Part I (Plain materials) e Part II (Notches). *ASME Journal of Engineering Materials and Technology* 131, 021009–1-021009–9 e 021010–1-021010–8.
- Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.
- Wang C.H., Brown M.W. (1973) A path-independent parameter for fatigue under proportional non-proportional loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 16, 1285-1298.
- Zamrik S.Y., Frishmuth R.E. (1973) The effects of out-of-phase biaxial-strain cycling on low-cycle fatigue. *Experimental Mechanics* 13, 204-208.

VERIFICA A FATICA IN PRESENZA DI CARICHI MULTIASSIALI RANDOM E ALTO NUMERO DI CICLI

4.1 Introduction

The present Chapter deals with the problem of fatigue damage evaluation under high-cycle fatigue (HCF) of metallic structural components subjected to multiaxial random loadings. In particular, the problem is addressed by applying a new criterion developed on the basis of a previous formulation proposed by Carpinteri and co-workers in 2014 (Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b).

First of all, the fundamental concepts related to the above multiaxial loading condition and the type of approach employed are outlined.

Structural metallic components are often exposed, during their service life, to complex time-varying loading (random loading). This is the case of metallic structures, such as components of railway coaches, pressure vessels, nuclear and pressure water reactors, gas turbines and automobile crankshafts (Wolfsteiner, 2013; Fissolo, 2015; Neri, 2015; Tanegashima, 2015).

The assessment of structural integrity and fatigue strength of the above metallic components under random loading is complex, and becomes even more complex in the case of multiaxial loading. In particular, the multiaxiality of stress state makes impossible the direct use of methods proposed for uniaxial random loading to estimate the fatigue life, since two or more independent stress tensor components may randomly vary with respect to the time. Therefore, the fatigue analysis under multiaxial random loading is a still open research topic.

Different criteria available in the literature to assess the fatigue life of structural metallic components under multiaxial random loading have been formulated in the time domain (Łagoda, 1994; Wang, 1996; Carpinteri, 2003;

Carpinteri, 2009). The above criteria evaluate the fatigue damage starting from the time histories of the stress/strain tensor components, and employing a cycle-counting method and a damage accumulation rule.

Experimental measurements or numerical simulations of the time histories of the stress/strain tensor components make such procedures expensive and time-consuming, since many records (experimental or numerical) are needed to obtain reliable statistical parameters of cycle distribution of random loading.

The multiaxial fatigue criteria formulated according to a frequency-domain approach (often named spectral methods) are an alternative procedure with respect to the above criteria in order to treat loading of random character (Łagoda, 2005; Benasciutti, 2006; Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b). In particular, by assuming that the applied loading can be modeled as a stationary ergodic Gaussian stochastic process, the random loading is completely described in the frequency-domain by its Power Spectral Density (PSD) function. The fatigue damage, related to a particular cycle-counting method, is evaluated by means of analytical expressions (exact or approximate) which are deemed to be dependent on both the material fatigue properties and the Power Spectral Density (PSD) function of the counting variable. Such features make such criteria more computational efficient than the time-domain ones, still providing high levels of accuracy (Pitoiset, 2000).

Some multiaxial fatigue criteria, originally developed in time-domain, have been reformulated in frequency-domain as multiaxial spectral methods, and may be based on: either an equivalent uniaxial stress (Benasciutti, 2006; Niesłony, 2007) or stress invariants (Cristofori, 2011).

Taking the above idea as a starting point, the criterion discussed in the present Chapter and based on an equivalent uniaxial stress evaluated on the critical plane is a reformulation of the time-domain criterion proposed by Carpinteri and co-workers (Carpinteri, 2003; Carpinteri, 2009).

One of the aims of the present Ph.D. Thesis is to suggest a modification to the original formulation of the criterion in order to improve its fatigue damage estimation capability.

In particular, the above modification consists in implementing different relationships, related to the critical plane orientation and available in the literature

(Łagoda, 2014), in the present criterion. Some results have been published in Ref. (Vantadori, 2015).

Finally, the validation of the new formulation proposed in the present Ph.D. Thesis is performed by employing experimental data available in the literature, related to biaxial HCF tests on steel round specimens subjected to non-proportional bending and torsion random loading.

4.1 Introduzione

Il presente Capitolo è dedicato alla stima del danno a fatica di componenti strutturali metallici in presenza di carichi multiassiali random e alto numero di cicli, problema che viene affrontato impiegando un nuovo criterio sviluppato intervenendo su una precedente formulazione nel dominio della frequenza proposta da Carpinteri e collaboratori nel 2014 (Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b).

Prima di entrare nel dettaglio dei contenuti, occorre fare una breve premessa relativamente a tale tipologia di carico e al tipo di approccio che può essere impiegato per affrontare il problema in oggetto.

I componenti strutturali metallici risultano spesso soggetti in esercizio a carichi variabili nel tempo in modo irregolare (carichi random). È il caso di: componenti delle carrozze ferroviarie, serbatoi in pressione, reattori nucleari e reattori ad acqua in pressione, turbine, e alberi di automobili (Wolfsteiner, 2013; Fissolo, 2015; Neri, 2015; Tanegashima, 2015).

La valutazione dell'integrità strutturale e della resistenza a fatica in presenza di carichi random dei componenti metallici di cui sopra risulta un problema piuttosto complesso, soprattutto quando si è in presenza di carichi multiassiali. In particolare, la multiassialità dello stato tensionale rende impossibile l'immediato impiego dei metodi proposti per stimare la vita a fatica in presenza di sollecitazioni uniassiali random, poiché due o più componenti indipendenti del tensore degli sforzi variano nel tempo in modo casuale. Pertanto la progettazione a fatica in presenza di carichi multiassiali random rappresenta, ancora oggi, un campo di ricerca piuttosto aperto.

Diversi criteri risultano disponibili in letteratura per la valutazione della vita a fatica di componenti strutturali metallici in presenza di carichi multiassiali random,

formulati impiegando approcci definiti nel dominio del tempo (Łagoda, 1994; Wang, 1996; Carpinteri, 2003; Carpinteri, 2009). In particolare, tali criteri stimano il danno a fatica a partire dalle storie temporali delle componenti del tensore degli sforzi o delle deformazioni, e sfruttano un algoritmo per il conteggio dei cicli e una legge di accumulazione del danno.

La misura sperimentale o la simulazione numerica delle storie temporali di cui sopra costituisce la parte temporalmente più onerosa dell'intera procedura, poiché sono necessarie molte acquisizioni (sperimentali o numeriche) per ottenere parametri statistici affidabili.

I criteri di fatica multiassiale formulati impiegando approcci definiti nel dominio della frequenza (anche chiamati metodi spettrali) rappresentano un'alternativa ai primi per la stima del danno a fatica di componenti strutturali metallici in presenza di carichi random (Łagoda, 2005; Benasciutti, 2006; Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b). In particolare, nel caso in cui la sollecitazione agente possa essere modellata come un processo stocastico stazionario ergodico e Gaussiano, questa viene descritta, nel dominio della frequenza, mediante la relativa funzione di densità spettrale. Il danno a fatica, la cui espressione dipende dal metodo di conteggio adottato, viene stimato mediante espressioni analitiche (esatte o approssimate) che dipendono dalle proprietà a fatica del materiale e dalla funzione di densità spettrale della variabile conteggiata. Tali caratteristiche rendono i criteri formulati nel dominio della frequenza molto più efficienti da un punto di vista computazionale rispetto a quelli formulati nel dominio del tempo, pur mantenendo un'elevata precisione (Pitoiset, 2000).

Alcuni criteri, originariamente sviluppati nel dominio del tempo, sono stati riformulati nel dominio della frequenza impiegando: una tensione uniassiale equivalente (Benasciutti, 2006; Niesłony, 2007) oppure gli invarianti di tensione (Cristofori, 2011).

Anche il criterio oggetto del mio intervento nasce come riformulazione di un criterio nel dominio del tempo (Carpinteri, 2003; Carpinteri, 2009), impiegando una tensione uniassiale equivalente valutata sul piano critico.

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dal proporre una modifica alla formulazione originale del criterio per migliorarne la precisione nell'ambito della valutazione del danno a fatica, e quindi della vita a fatica.

In particolare, il mio primo intervento è relativo all'implementare all'interno del criterio (Vantadori, 2015) differenti formulazioni per la definizione del piano critico e disponibili in letteratura (Łagoda, 2014).

Infine, per verificare la validità della nuova formulazione proposta nell'ambito della presente Tesi, vengono esaminati dati sperimentali di letteratura, relativi a prove di fatica biassiali ad alto numero di cicli condotte su provini lisci soggetti a carichi random non proporzionali di flessione e torsione.

4.2 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate ai processi stocastici

Il presente Paragrafo introduce i concetti generali relativi ai processi stocastici stazionari ed ergodici, e definisce le grandezze statistiche associate ai metodi di conteggio dei cicli e alle leggi di accumulo del danno.

4.2.1 Funzione di densità spettrale

Si consideri che la sollecitazione agente sul componente strutturale sia descritta da un processo stocastico, stazionario ed ergodico, $\mathbf{X}(t)$, avente valore medio nullo. In particolare, le proprietà statistiche di tale processo sono costanti rispetto al tempo in quanto il processo è stazionario e possono essere dedotte da una singola registrazione sufficientemente lunga $X(t)$, in quanto il processo è ergodico. Tali ipotesi non sono restrittive: infatti, sollecitazioni, come quelle dovute al traffico, al vento, alle onde, possono essere descritte da processi stocastici, stazionari ed ergodici.

Nel dominio della frequenza, il processo stocastico $X(t)$ viene descritto mediante la funzione di densità spettrale di potenza (Power Spectral Density (PSD) function) (Fig. 4.1) definita come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, $R_{X,X}$:

$$S_{X,X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,X}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.1)$$

dove ω rappresenta la pulsazione e:

$$R_{X,X}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau) dt \quad (4.2)$$

dove $E[\cdot]$ denota l'operatore di media stocastica, t il tempo e T il periodo dell'osservazione.

È possibile calcolare i momenti spettrali del processo stocastico attraverso la funzione di densità spettrale (Lutes, 1997):

$$\lambda_m = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^m S_{X,X}(\omega) d\omega \quad (4.3)$$

dove m è un numero reale positivo. Tali momenti rappresentano alcune importanti proprietà del processo, $X(t)$, e delle sue derivate:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sigma_X^2 \\ \lambda_2 &= \sigma_{\dot{X}}^2 \\ \lambda_4 &= \sigma_{\ddot{X}}^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

essendo σ_X , $\sigma_{\dot{X}}$ e $\sigma_{\ddot{X}}$ le varianze di $X(t)$, $\dot{X}(t)$ e $\ddot{X}(t)$, rispettivamente.

Il numero di attraversamenti dal valore medio ($\mu_X = 0$ per ipotesi) nell'unità di tempo (con pendenza positiva), ν_0 , può essere ottenuto dai momenti spettrali λ_0 e λ_2 di $S_{X,X}(\omega)$ come segue (Lutes, 1997):

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (4.5)$$

mentre il numero di massimi relativi nell'unità di tempo, ν_p , può essere ottenuto dai momenti spettrali λ_2 e λ_4 di $S_{X,X}(\omega)$ (Lutes, 1997):

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (4.6)$$

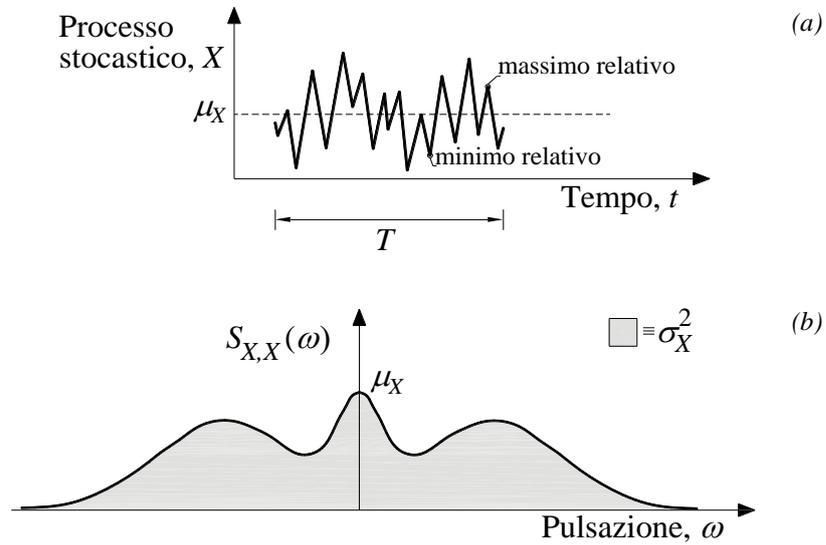


Figura 4.1 Processo stocastico $X(t)$: parametri caratteristici (a); funzione di densità spettrale $S_{X,X}(\omega)$ (b).

La forma e le caratteristiche geometriche della PSD function vengono descritte dai parametri di larghezza di banda:

$$\alpha_m = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_{2m}}} \quad (4.7)$$

dove m , in questo caso, può assumere anche valori non interi.

I parametri di larghezza di banda maggiormente usati sono:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_2}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}} \quad (4.8)$$

I parametri α_m sono numeri adimensionali, con $0 \leq \alpha_m \leq 1$ e $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Inoltre, tali parametri tendono all'unità nel caso di processi a banda stretta (narrow-band), per i quali la PSD function assume valori significativi su un intervallo ristretto di frequenze, mentre tendono a zero all'aumentare dell'ampiezza dell'intervallo di cui sopra, cioè nei processi a banda larga (broad-band).

La funzione densità di probabilità dei massimi relativi, $p_p(X)$, è data da (Rice, 1945):

$$p_p(X) = \frac{\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2(1-\alpha_2^2)}} + \frac{\alpha_2 X}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \phi\left(\frac{\alpha_2 X}{\sigma_x \sqrt{1-\alpha_2^2}}\right) \quad (4.9)$$

dove l'operatore $\phi(\cdot)$ è la funzione di distribuzione normale standard, che per un generico processo stocastico Gaussiano $x(t)$ viene calcolata come:

$$\phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \quad (4.10)$$

La probabilità cumulata dei massimi relativi è data da:

$$P_p(X) = \phi\left(\frac{X}{\sigma_x \sqrt{1-\alpha_2^2}}\right) - \alpha_2 e^{-\frac{X^2}{2\sigma_x^2}} \phi\left(\frac{\alpha_2 X}{\sigma_x \sqrt{1-\alpha_2^2}}\right) \quad (4.11)$$

In *Figura 4.2* viene mostrato come la funzione densità di probabilità $p_p(X)$ cambi la forma al variare del valore del parametro α_2 .

La funzione densità di probabilità dei minimi relativi è simmetrica rispetto a quella dei massimi relativi ($p_v(X) = p_p(-X)$), e quindi è esprimibile come:

$$P_v(X) = \phi\left(\frac{X}{\sigma_x \sqrt{1-\alpha_2^2}}\right) + \alpha_2 e^{-\frac{X^2}{2\sigma_x^2}} \left[1 - \phi\left(\frac{\alpha_2 X}{\sigma_x \sqrt{1-\alpha_2^2}}\right)\right] \quad (4.12)$$

Per processi a banda stretta ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), la funzione densità di probabilità e la probabilità cumulata dei massimi relativi coincidono con quelle alla Rayleigh (definite per $x \geq 0$), che per un generico processo stocastico Gaussiano $x(t)$ risultano (Lutes, 1997):

$$r(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{e} \quad R(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (4.13)$$

Infine, è possibile osservare dalla *Figura 4.2* che un processo Gaussiano a banda stretta è caratterizzato da massimi relativi tutti positivi (e maggiori del valor medio), mentre un processo a banda larga può avere massimi sia positivi sia negativi.

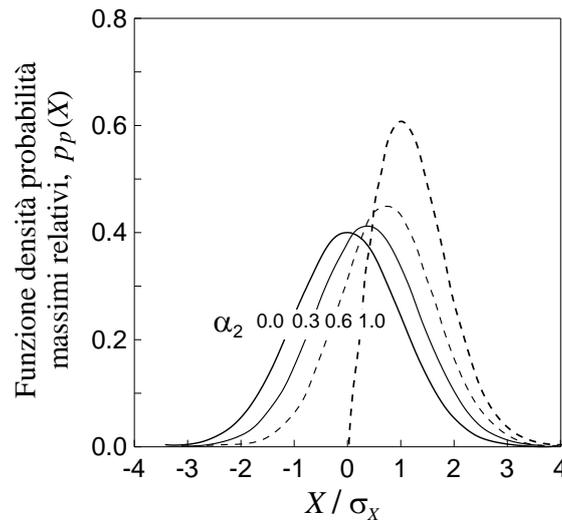


Figura 4.2 Funzione densità di probabilità dei massimi relativi $p_p(X)$, per diversi valori del parametro α_2 .

4.2.2 Funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati e danno a fatica

Per storie di carico ad ampiezza variabile è necessario definire un metodo di conteggio dei cicli, criterio che stabilisce come accoppiare i massimi e i minimi relativi della storia al fine di ottenere gruppi di cicli, ciascuno caratterizzato da una ampiezza e da un valore medio. In particolare, ogni gruppo viene descritto in funzione dei massimi relativi u e minimi relativi v (essendo $u \geq v$), o equivalentemente in funzione dell'ampiezza, s , e del valore medio, m :

$$s = \frac{u - v}{2} \quad \text{e} \quad m = \frac{u + v}{2} \quad (4.14)$$

Il problema fondamentale nella valutazione della resistenza a fatica nel caso di sollecitazione random $X(t)$, è la definizione di una appropriata funzione di densità

di probabilità dei cicli conteggiati in quanto il danno a fatica dipende strettamente da tale distribuzione.

Tale funzione è rappresentata dalla funzione densità di probabilità (Power Density Function (PDF)) combinata, $h(u, v)$, espressa in funzione dei valori massimi, u , e minimi, v , relativi (si noti che $h(u, v)$ è nulla per $u < v$). La corrispondente probabilità cumulata risulta:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v h(x, y) dx dy \quad (4.15)$$

che esprime la probabilità di avere un ciclo con massimo relativo minore o uguale ad u e un minimo relativo minore o uguale a v .

Con un cambio di variabili, è possibile esprimere la funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati in funzione dell'ampiezza, s , e del valore medio, m :

$$p_{a,m}(s, m) = 2h(m + s, m - s) \quad (4.16)$$

mentre la funzione densità di probabilità dell'ampiezza dei cicli è data dalla densità di probabilità marginale:

$$p_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{a,m}(s, m) dm \quad (4.17)$$

Nota la PSD marginale dell'ampiezza, $p_a(s)$, è possibile valutare il valore atteso del danno a fatica per unità di tempo applicando la legge lineare di accumulo del danno proposta da Palmgren-Miner (Miner, 1945):

$$E[D] = \nu_a C^{-1} \int_0^{\infty} s^k p_a(s) ds \quad (4.18)$$

dove ν_a è il numero di cicli nell'unità di tempo, k e C sono i parametri della curva $S-N$ per sforzo normale alterno ($S^k N = C$). La distribuzione di probabilità marginale, $p_a(s)$, dipende dal metodo di conteggio dei cicli adottato.

I metodi di conteggio comunemente impiegati sono quattro, e differiscono tra loro per il modo di accoppiare i massimi e i minimi relativi, e più precisamente:

(i) il metodo Peak Counting (PC), prevede che ogni massimo relativo sopra allo zero venga accoppiato al suo minimo relativo simmetrico. I massimi al di sotto dello zero sono trascurati, e il numero dei cicli conteggiati sarà, quindi, inferiore del numero di massimi relativi;

(ii) il metodo Level Crossing Counting (LCC), accoppia solo il numero di massimi meno il numero di minimi relativi positivi, poiché i minimi negativi non possono essere trascurati. Il numero di cicli con ampiezza maggiore di un certo valore x è, quindi, uguale al numero di massimi relativi meno il numero di minimi relativi maggiori di x ;

(iii) il metodo Range Counting (RC), prevede che ogni massimo relativo venga accoppiato con il successivo minimo relativo, in modo tale che il numero di cicli e di intervalli coincidano;

(iv) il metodo Rainflow Counting (RFC), prevede che il massimo e il minimo assoluto si accoppino per formare il ciclo di range massimo, mentre gli altri cicli vengono formati accoppiando ogni massimo relativo con un minimo, ad esso immediatamente vicino o lontano.

Il metodo Rainflow Counting (RFC) è stato riconosciuto dalla comunità scientifica come la procedura di conteggio dei cicli più efficiente (Dowling, 1972).

Facendo quindi riferimento a tale metodo, la probabilità cumulata dei cicli conteggiati è pari a:

$$H_{RFC}(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v h_{RFC}(x, y) dx dy \quad (4.19)$$

Inoltre, con riferimento alle Eq. (4.16)-(4.17), è possibile definire la funzione densità di probabilità dei cicli rainflow in funzione dell'ampiezza s e del valore medio m dei cicli, $p_{RFC}(s, m)$, e la funzione densità di probabilità marginale, $p_{RFC}(s)$.

Nota p_{RFC} e i parametri della curva $S-N$, è possibile calcolare il valore atteso di danno a fatica per unità di tempo mediante l'Eq. (4.18), che risulta particolarizzata come segue:

$$E[D_{RFC}] = v_a C^{-1} \int_0^{\infty} s^k p_{RFC}(s) ds \quad (4.20)$$

È importante sottolineare che il metodo RFC è di tipo “complete counting”, cioè ad ogni massimo è accoppiato un minimo minore o uguale:

$$\nu_a = \nu_p \quad (4.21)$$

essendo ν_a il numero di cicli nell'unità di tempo e ν_p il numero di massimi relativi nell'unità di tempo.

Inoltre, Frendahl e collaboratori hanno dimostrato che il metodo RFC è anche una procedura “cross consistent” (Frendahl, 1993). In particolare, l'estremo superiore del danno atteso per unità di tempo è pari al danno $E[D_{NB}]$ di un processo a banda stretta (è la cosiddetta Narrow Band approximation) e l'estremo inferiore è pari al danno $E[D_{RC}]$ valutato impiegando il metodo Range Counting (RC).

In un processo stazionario, il danno a fatica definito dall'Eq. (4.20) è costante e quindi il danno atteso nell'istante T è pari a: $E[D_{RFC}](T) = T \cdot E[D_{RFC}]$. La vita a fatica, T_{cal} , può essere, quindi, calcolata ponendo $E[D_{RFC}](T_{cal})$ uguale al valore di danno critico $E[D_{cr}]$ assunto pari all'unità:

$$T_{cal} = \frac{E[D_{cr}]}{E[D_{RFC}]} = \frac{1}{E[D_{RFC}]} \quad (4.22)$$

Tuttavia, a causa della complessità dell'algoritmo con cui il conteggio rainflow accoppia massimi e minimi per definire i cicli di fatica (un massimo non è sempre accoppiato con il minimo seguente), ad oggi non sono disponibili soluzioni analitiche esplicite per la funzione densità di probabilità dei cicli rainflow (espressa in termini di $h_{RFC}(u, v)$ o di $p_{RFC}(s)$), quindi del danno a fatica, $E[D_{RFC}]$, e della vita a fatica, T_{cal} .

Per tale ragione, in letteratura vengono proposte soluzioni approssimate per la stima di tale danno.

4.3 Verifica a fatica in presenza di carichi monoassiali random: approccio spettrale

Nel presente Paragrafo si considerano i metodi spettrali (formulati secondo un approccio nel dominio della frequenza) comunemente usati per l'analisi a fatica di

componenti strutturali metallici soggetti a carichi monoassiali random del tipo stazionario, ergodico e Gaussiano, e più precisamente i metodi: Narrow Band (NB) approximation, di Wirsching-Light (WL) (Wirsching, 1980), di Dirlik (DK) (Dirlik, 1985), di Zhao-Baker (ZB) (Zhao, 1992) e di Tovo-Benasciutti (TB) (Tovo, 2002; Benasciutti, 2006).

4.3.1 Metodo Narrow Band (NB) approximation e formula di Wirsching-Light (WL)

Per un processo a banda stretta (narrow-band), $X(t)$, per il quale, quindi, ad ogni massimo segue un minimo pressoché simmetrico rispetto al valore medio, è lecito assumere che la funzione densità di probabilità delle ampiezze dei cicli conteggiati $p_{RFC}(s)$ coincida con la funzione densità di probabilità dei massimi relativi dei cicli conteggiati, $p_p(s)$, cioè le ampiezze seguono una distribuzione alla Rayleigh. Inoltre, v_a può essere considerata pari al numero di attraversamenti dal valore medio con pendenza positiva, v_0 .

Il danno a fatica risultante dall'Eq. (4.20) è pari, quindi, a:

$$E[D_{NB}] = v_0 C^{-1} (\sqrt{2\lambda_0})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (4.23)$$

dove $\Gamma(\cdot)$ è la funzione Gamma.

Se il processo è a banda larga (broad-band), il valore atteso del danno a fatica è pari a quello di un processo a banda stretta equivalente, con la stessa varianza, λ_0 , e numero di massimi relativi pari al numero di attraversamenti dal valore medio con pendenza positiva del processo a banda larga reale. Tale procedura è definita Narrow Band (NB) approximation del danno rainflow di un processo a banda larga.

Tuttavia, è ampiamente riconosciuto che il metodo NB tende a stimare cicli di ampiezza maggiore di quelli che si conterebbero con il metodo RFC e, di conseguenza, il danno $E[D_{NB}]$ è una stima conservativa del danno $E[D_{RFC}]$ (Rychlik, 1993).

Alcuni autori (Wirsching, 1980) hanno proposto di calcolare in modo approssimato il danno $E[D_{RFC}]$ attraverso la riduzione del valore del danno atteso con il metodo NB approximation:

$$E\left[D_{RFC}^{WL}\right] = \rho_{WL} E\left[D_{NB}\right] \quad (4.24)$$

dove ρ_{WL} è un fattore correttivo determinato sperimentalmente in funzione della pendenza k della curva $S - N$ e del parametro di larghezza di banda α_2 :

$$\rho_{WL} = a(k) + [1 - a(k)](1 - \varepsilon)^{b(k)} \quad (4.25)$$

essendo $\varepsilon = \sqrt{1 - \alpha_2^2}$ un parametro di larghezza spettrale, $a(k)$ e $b(k)$ espressi dalle seguenti equazioni:

$$a(k) = 0.926 - 0.033k \quad \text{e} \quad b(k) = 1.587k - 2.323 \quad (4.26)$$

Si noti che, per un processo a banda stretta, $\alpha_2 = 1$ ($\varepsilon = 0$), che fornisce correttamente $\rho_{WL} = 1$.

È importante sottolineare che le formule sopra riportate assumono che il danno rainflow dipenda solamente da tre momenti spettrali ($\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4$), attraverso il parametro α_2 .

4.3.2 Modello di Dirlik (DK)

Il modello proposto da Dirlik (Dirlik, 1985) consente di approssimare la PSD delle ampiezze dei cicli conteggiati, $p_{RFC}(s)$, attraverso la combinazione di una densità di probabilità esponenziale e di due densità di probabilità alla Rayleigh:

$$p_{RFC}^{DK}(s) = \frac{1}{(\lambda_0)^{1/2}} \left[\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right] \quad (4.27)$$

dove $Z = s / (\lambda_0)^{1/2}$ è l'ampiezza normalizzata e:

$$x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4} \right)^{1/2}, \quad D_1 = \frac{2(x_m - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2} \quad (4.28)$$

$$D_2 = \frac{1 - \alpha_2^2 - D_1 + D_1^2}{1 - R}, \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2$$

$$Q = \frac{1.25(\alpha_2^2 - D_3 - (D_2 R))}{D_1}, \quad R = \frac{\alpha_2 - x_m - D_1^2}{1 - \alpha_2 - D_1 + D_1^2}$$

Tale modello fornisce una $p_{RFC}(s)$ (e quindi un danno a fatica $E[D_{RFC}]$) dipendente da quattro momenti spettrali, essendo aggiunta, rispetto al modello di WL, la dipendenza dal momento spettrale λ_1 .

Sostituendo l'espressione di $p_{RFC}^{DK}(s)$ nell'Eq. (4.20), si ottiene la seguente espressione per il danno rainflow:

$$E[D_{RFC}^{DK}] = \frac{V_p}{C} \lambda_0^{k/2} \left[D_1 Q^k \Gamma(1+k) + (\sqrt{2})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (D_2 |R|^k + D_3) \right] \quad (4.29)$$

Numerosi studi hanno dimostrato che il metodo DK presenta una precisione maggiore nella valutazione del danno a fatica rispetto agli altri metodi disponibili in letteratura (Bouyssy, 1993; Halfpenny, 1999). Tuttavia, è necessario considerare che la formulazione di tale metodo non è supportata da alcuna giustificazione teorica e inoltre la PSD marginale proposta non tiene conto della dipendenza dal valore medio, rendendo così impossibile un'ulteriore estensione del metodo a problemi non Gaussiani.

4.3.3 Modello di Zhao-Baker (ZB)

Zhao e Baker (Zhao, 1992) hanno sviluppato un metodo simile a quello proposto da Dirlik, assumendo che la PSD delle ampiezze sia una combinazione lineare di una funzione densità di probabilità alla Weibull e di una alla Rayleigh:

$$p_{RFC}^{ZB}(Z) = w a b Z^{b-1} e^{-aZ^b} + (1-w) Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad (4.30)$$

dove $Z = s / (\lambda_0)^{1/2}$ è l'ampiezza normalizzata, w è un fattore peso ($0 \leq w \leq 1$), a e b sono i parametri di Weibull ($a > 0$, $b > 0$).

In particolare, il fattore peso è definito come:

$$w = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) a^{-1/b}} \quad (4.31)$$

mentre gli altri due parametri sono pari a:

$$a = 8 - 7\alpha_2, \quad b = \begin{cases} 1.1 & \text{se } \alpha_2 < 0.9 \\ 1.1 + 9(\alpha_2 - 0.9) & \text{se } \alpha_2 \geq 0.9 \end{cases} \quad (4.32)$$

In un processo a banda stretta $\alpha_2 = 1$ e di conseguenza $a = 1$, $b = 2$ e $w = 0$, ritrovando correttamente una PSD delle ampiezze alla Rayleigh.

Si osserva però che quando $\alpha_2 \leq 0.130$ allora $w > 1$, il che non è corretto essendo w definito tra 0 e 1. Tuttavia, applicazioni con valori di α_2 così piccoli non sono frequenti nella pratica applicativa.

Esiste una formulazione alternativa per il parametro a , che include una dipendenza dal parametro di larghezza di banda, $\alpha_{0.75}$. Infatti, è stato osservato sperimentalmente che, per valori piccoli di k (ad esempio $k = 3$), il danno rainflow è particolarmente influenzato da $\alpha_{0.75}$ (Lutes, 1984). In particolare, per $k = 3$, il fattore correttivo $\rho_{ZB} = E[D_{RFC}^{ZB}] / E[D_{NB}]$ è correlato con il parametro $\alpha_{0.75}$ (Zhao, 1992):

$$\rho_{ZB} = \begin{cases} -0.4154 + 1.392 \alpha_{0.75} & \text{se } \alpha_{0.75} \geq 0.5 \\ 0.28 & \text{se } \alpha_{0.75} < 0.5 \end{cases} \quad (4.33)$$

Il parametro a è, quindi, calcolato come $a = d^{-b}$, essendo d soluzione della seguente equazione:

$$\Gamma\left(1 + \frac{3}{b}\right)(1 - \alpha_2)d^3 + 3\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)(\rho_{ZB}\alpha_2 - 1)d + 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha_2(1 - \rho_{ZB}) = 0 \quad (4.34)$$

Nel caso di un processo a banda stretta, $\alpha_{0.75} = 1$, che fornisce $\rho_{ZB} = 0.9766$, non coincidente con la soluzione esatta prevista (cioè $\rho_{ZB} = 1$). Inoltre, adottando

la formulazione alternativa di cui sopra, il fattore peso w può risultare essere inferiore a zero per particolari valori di $\alpha_{0.75}$ e α_2 (ad esempio nel caso di: $\alpha_2 > 0.5$ e $\alpha_{0.75} < 0.65$).

Con un cambio di variabili, è possibile esprimere l'Eq. (4.30) in funzione dell'ampiezza s :

$$p_{RFC}^{ZB}(s) = w \frac{ab}{\lambda_0^{1/2}} \left(\frac{s}{\lambda_0^{1/2}} \right)^{b-1} e^{-a \left(\frac{s}{\lambda_0^{1/2}} \right)^b} + (1-w) \frac{s}{\lambda_0} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\lambda_0^{1/2}} \right)^2} \quad (4.35)$$

Sostituendo l'espressione di $p_{RFC}^{ZB}(s)$ nell' Eq. (4.20), si ottiene il valore atteso di danno a fatica per unità di tempo:

$$E[D_{RFC}^{ZB}] = \frac{v_p}{C} \lambda_0^{k/2} \left[w a^{-\frac{k}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{b}\right) + (1-w) 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right] \quad (4.36)$$

4.3.4 Modello di Tovo-Benasciutti (TB)

Tovo e Benasciutti (Tovo, 2002; Benasciutti, 2006) hanno affrontato il problema della stima del danno rainflow attraverso una interpolazione lineare effettuata tra il valore al limite inferiore e quello al limite superiore del danno $E[D_{RFC}]$. In particolare, come introdotto al Paragrafo 4.2.2, il danno $E[D_{RFC}]$ risulta compreso tra:

$$E[D_{RC}] < E[D_{RFC}] < E[D_{NB}] \quad (4.37)$$

dove $E[D_{RC}]$ è il danno valutato impiegando il metodo Range Counting (RC) e $E[D_{NB}]$ è il danno dato dalla Narrow Band (NB) approximation (si veda l'Eq. (4.23)).

È stato recentemente dimostrato che il danno $E[D_{NB}]$, valore limite superiore del danno rainflow, è pari al danno calcolato adottato il metodo Level Crossing Counting (LCC), $E[D_{LCC}]$ (Tovo, 2002). In particolare, la distribuzione di probabilità dei cicli conteggiati attraverso il metodo LCC è data da:

$$h_{LCC} = \begin{cases} [p_p(u) - p_v(u)] \delta(u+v) + p_v(u) \delta(u-v) & \text{se } u > 0 \\ p_p(u) \delta(u-v) & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione delta di Dirac, e $p_p(u)$ e $p_v(u)$ sono le funzioni densità di probabilità dei massimi relativi e dei minimi relativi, rispettivamente (nel caso di processi random Gaussiani, la densità di probabilità $p_p(u)$ è calcolata attraverso l'Eq. (4.9)).

La funzione densità di probabilità marginale $p_{LCC}(s)$ è pari a:

$$p_a(s) = \alpha_2 \frac{s}{\lambda_0} e^{-\frac{s^2}{2\lambda_0}} \quad (4.39)$$

ed è una densità di probabilità alla Rayleigh, che sostituita nell'Eq. (4.18) fornisce il danno $E[D_{NB}]$ di Eq. (4.23), ponendo $v_a = v_p$ (il metodo LCC è, infatti, di tipo “complete counting”) (Tovo, 2002).

Relativamente al valore limite inferiore del danno rainflow, ad oggi non sono note espressioni analitiche esatte di tale danno ed è quindi necessario adottare la seguente soluzione approssimata proposta da Madsen e collaboratori (Madsen, 1986):

$$E[D_{RC}] = v_p C^{-1} (\sqrt{2\lambda_0} \alpha_2)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) = E[D_{NB}] \alpha_2^{k-1} \quad (4.40)$$

È importante osservare che la funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati $h_{RC}(u, v)$, attraverso la quale è possibile calcolare in modo approssimato il danno $E[D_{RC}]$, è stata ricavata in modo esplicito da Tovo (Tovo, 2002):

$$h_{RC}(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \lambda_0 \alpha_2^2} e^{-\frac{u^2 + v^2}{4\lambda_0(1-\alpha_2^2)}} e^{-\frac{(u-v)^2}{4\lambda_0(1-\alpha_2^2)} \frac{1-2\alpha_2^2}{2\alpha_2^2}} \left[\frac{u-v}{\sqrt{4\lambda_0(1-\alpha_2^2)}} \right] \quad (4.41)$$

La corrispondente funzione densità di probabilità marginale, $p_{RC}(s)$, è pari a:

$$p_{RC}(s) = \frac{s}{\lambda_0 \alpha_2^2} e^{-\frac{s^2}{2\alpha_2^2 \lambda_0}} \quad (4.42)$$

Se si sostituisce, quindi, nell'Eq. (4.18) la funzione densità di probabilità marginale, $p_{RC}(s)$, calcolata a partire dall'Eq. (4.42), è possibile ottenere il valore del danno $E[D_{RC}]$ calcolato secondo l'Eq. (4.40). Naturalmente, non è possibile affermare che $h_{RC}(u,v)$ (Eq. (4.41)) e $p_{RC}(s)$ (Eq. (4.42)) siano le distribuzioni di probabilità dei cicli conteggiati impiegando il metodo RC, ma è ragionevole assumere che tali quantità provochino un danno prossimo all'estremo inferiore del danno stimato con il metodo RFC.

La stima del danno è condotta come segue:

$$E[D_{RFC}^{TB}] = bE[D_{NB}] + (1-b)E[D_{RC}] \quad (4.43)$$

dove b dipende dalla PSD del processo, attraverso i corrispondenti parametri spettrali. Tuttavia, non disponendo di informazioni teoriche circa tale dipendenza, si ricorre a formulazioni approssimate, come quella proposta da Tovo (Tovo, 2002):

$$b = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \left[1.112(1 + \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) e^{2.11\alpha_2} + (\alpha_1 - \alpha_2) \right]}{(\alpha_2 - 1)^2} \quad (4.44)$$

L'Eq. (4.44) assume implicitamente che il danno rainflow dipenda solamente da quattro momenti spettrali ($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$), attraverso i parametri α_1 e α_2 .

Un'altra formulazione approssimata disponibile in letteratura per il parametro b è la seguente (Benasciutti, 2006):

$$b^{0.75} = \frac{\alpha_{0.75}^2 - \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} \quad (4.45)$$

Tale relazione implica una dipendenza di b dai soli due parametri di larghezza di banda $\alpha_{0.75}$ e α_2 .

Infine, sulla base dell'Eq. (4.37), la funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati con il metodo RFC, $h_{RFC}(u,v)$, può essere stimata adottando una combinazione lineare analoga a quella riportata nell'Eq. (4.43) (Benasciutti, 2006):

$$h_{RFC}(u,v) = b h_{LCC}(u,v) + (1-b) h_{RC}(u,v) \quad (4.46)$$

essendo $h_{RC}(u,v)$ e $h_{LCC}(u,v)$ le funzione densità di probabilità dei cicli conteggiati valutate impiegando il metodo Range Counting (RC) e il metodo Level Crossing Counting (LCC), rispettivamente. Poiché la distribuzione $h_{RC}(u,v)$ è determinata con una formulazione approssimata, l'Eq. (4.46) vale solamente in prima approssimazione. Infine, in modo del tutto analogo è possibile stimare la funzione densità di probabilità marginale dei cicli rainflow, $p_{RFC}(s)$, come:

$$p_{RFC}(s) = b p_{LCC}(s) + (1-b) p_{RC}(s) \quad (4.47)$$

dove $p_{RC}(s)$ e $p_{LCC}(s)$ sono le funzione densità di probabilità marginali relative ai cicli conteggiati con il metodo RC e con il metodo LCC, rispettivamente.

4.4 Il criterio nella sua formulazione originale

Il danno a fatica in presenza di carichi multiassiali random e alto numero di cicli viene valutato impiegando il criterio formulato da Carpinteri e collaboratori nel 2014, basato sull'approccio del piano critico (Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b). Tale criterio è una riformulazione, nel dominio della frequenza, di un criterio formulato dagli autori nel dominio del tempo (Carpinteri, 2003; Carpinteri, 2009), basato sulla definizione di una tensione monoassiale equivalente. In particolare, il criterio formulato nel dominio delle frequenze consente di valutare la vita a fatica una volta nota la PSD di una tensione uniassiale equivalente, calcolata sul piano critico. In tal modo, è possibile condurre la stima del danno a fatica in regime multiassiale in modo del tutto analogo a quanto avviene in regime monoassiale, adottando i metodi spettrali disponibili in letteratura, ampiamente accettati dalla comunità scientifica (discussi al Paragrafo 4.3).

Il criterio si compone delle seguenti fasi: (i) definizione del piano critico; (ii) valutazione della PSD di una tensione normale equivalente; (iii) determinazione della vita a fatica.

Più precisamente:

(i) la giacitura del piano critico risulta correlata alla matrice della PSD del tensore degli sforzi;

(ii) sul piano di verifica, la PSD di una tensione equivalente è definita attraverso una combinazione lineare delle PSD della tensione normale e della tensione tangenziale, quest'ultima proiettata lungo la direzione che massimizza la varianza di tale tensione;

(iii) la PSD della tensione equivalente è utilizzata per stimare il danno atteso, e quindi per determinare la vita a fatica del componente strutturale attraverso il modello di Tovo-Benasciutti (Tovo, 2002; Benasciutti, 2006), discusso al Paragrafo 4.3.4.

Tali fasi vengono discusse in dettaglio nei Paragrafi a seguire.

La formulazione del criterio nel dominio della frequenza è stata applicata ad alcuni dati sperimentali reperiti in letteratura, relativi a prove di fatica multiassiale eseguite su provini lisci sottoposti a carichi multiassiali random non proporzionali di flessione e torsione (Carpinteri, 2014; Carpinteri, 2015a; Carpinteri, 2015b). Il confronto tra i risultati teorici e quelli sperimentali è risultato piuttosto soddisfacente.

4.4.1 Determinazione della giacitura del piano critico

In un dato punto P del componente strutturale in esame, soggetto a uno stato tensionale variabile nel tempo in modo random, il tensore degli sforzi nel sistema di riferimento fisso $PXYZ$ (Fig. 4.3(a)) risulta descritto dal vettore delle tensioni

$$\mathbf{s}_{xyz}(t) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T.$$

Assumendo, poi, che tale tensore possa essere considerato come un processo random, stazionario, ed ergodico a sei dimensioni, con valore medio nullo, la matrice delle PSD functions, rispetto a XYZ , è definita come segue:

$$\mathbf{S}_{xyz}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} & S_{1,5} & S_{1,6} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & S_{2,4} & S_{2,5} & S_{2,6} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & S_{3,4} & S_{3,5} & S_{3,6} \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & S_{4,4} & S_{4,5} & S_{4,6} \\ S_{5,1} & S_{5,2} & S_{5,3} & S_{5,4} & S_{5,5} & S_{5,6} \\ S_{6,1} & S_{6,2} & S_{6,3} & S_{6,4} & S_{6,5} & S_{6,6} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

dove ω è la pulsazione, e i coefficienti, $S_{i,j}(\omega)$, della matrice sono definiti attraverso le funzioni di auto/intercorrelazione, $R_{i,j}(\tau)$:

$$R_{i,j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_i(t) s_j(t + \tau) dt \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (4.49)$$

$$S_{i,j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (4.50)$$

essendo t il tempo e T il periodo di osservazione.

Se si considera un sistema di riferimento ruotato $PX'Y'Z'$, definito mediante i tre angoli principali di Eulero, ϕ, θ, ψ (che descrivono tre rotazione antiorarie successive intorno, rispettivamente, agli assi Z, N e Z' , dove N è la cosiddetta linea dei nodi, Fig. 4.3(a)), la matrice delle PSD functions può essere calcolata attraverso la seguente relazione:

$$\mathbf{S}_{x'y'z'}(\omega) = \mathbf{C} \mathbf{S}_{xyz}(\omega) \mathbf{C}^T \quad (4.51)$$

dove la matrice di rotazione, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\phi, \theta, \psi)$, è definita come segue:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi^2 & s_\psi^2 & 2c_\psi s_\psi & 0 & 0 \\ 0 & s_\psi^2 & c_\psi^2 & -2c_\psi s_\psi & 0 & 0 \\ 0 & -2c_\psi s_\psi & 2c_\psi s_\psi & c_\psi^2 - s_\psi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\theta^2 & 0 & s_\theta^2 & 0 & 2c_\theta s_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_\theta^2 & 0 & c_\theta^2 & 0 & -2c_\theta s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\theta & 0 & -s_\theta \\ -c_\theta s_\theta & 0 & c_\theta s_\theta & 0 & c_\theta^2 - s_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi^2 & s_\phi^2 & 2c_\phi s_\phi & 0 & 0 \\ 0 & s_\phi^2 & c_\phi^2 & -2c_\phi s_\phi & 0 & 0 \\ 0 & -2c_\phi s_\phi & 2c_\phi s_\phi & c_\phi^2 - s_\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

con $c_\psi = \cos\psi$, $s_\psi = \sin\psi$, $c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$, $c_\phi = \cos\phi$ e $s_\phi = \sin\phi$. Nel seguito, i coefficienti della matrice $\mathbf{S}_{x'y'z'}(\omega)$, che rappresentano le PSD functions del vettore delle tensioni, $\mathbf{s}_{x'y'z'}(t) = \{s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5, s'_6\}^T = \{\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}, \tau_{y'z'}\}^T$, vengono indicati come $S_{i',j'}(\omega)$ con $i', j' = 1, \dots, 6$.

Con riferimento ai concetti presentati al Capitolo 2, la giacitura del piano critico è correlata alle direzioni medie delle direzioni principali di tensione (Carpinteri, 2011).

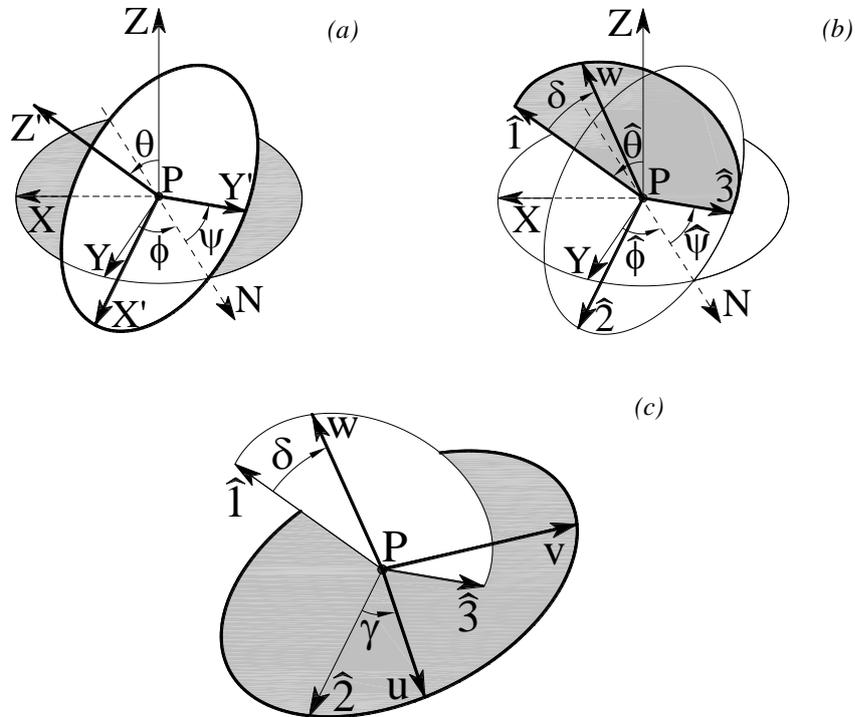


Figura 4.3 Sistemi di riferimento con origine nel generico punto P del componente strutturale: sistema di riferimento fisso XYZ e sistema ruotato $X'Y'Z'$ (a); direzioni principali medie di tensione $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ (b); sistema di riferimento uvw relativo al piano critico (c).

Gli angoli ϕ, θ , che individuano la direzione Z' (Fig. 4.3(a)), vengono fatti variare in modo da massimizzare, in senso statistico, la tensione normale $\sigma_{z'} = s_{3',3'}$ (Davenport, 1964):

$$E \left[\max_{0 \leq t \leq T} \sigma_{z'}(t) \right] = \sqrt{\lambda_0} F(N_1) = \sqrt{\lambda_0} \sqrt{2 \ln(N_1)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(N_1)}} \quad (4.53)$$

dove:

$$\lambda_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{3',3'}(\omega) d\omega, \quad \lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^2 S_{3',3'}(\omega) d\omega \quad (4.54)$$

e:

$$N_1 = \nu_0 T \quad (4.55)$$

Tale direzione è definita come la direzione media principale $\hat{1}$ (definita dagli angoli $\hat{\phi}, \hat{\theta}$, Fig. 4.3(b)).

L'angolo ψ , che rappresenta una rotazione intorno all'asse $\hat{1}$, viene fatto variare allo scopo di determinare la direzione (sul piano di normale $\hat{1}$) che massimizza la varianza della tensione tangenziale $\tau_{y'z'} = s_{6',6'}$:

$$\max_{0 \leq \psi \leq 2\pi} \left[\sigma_{6',6'}^2 \right] = \left[\max_{0 \leq \psi \leq 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{6',6'}(\omega, \psi) d\omega \right] \quad (4.56)$$

La direzione Y' così ottenuta è la direzione principale media $\hat{3}$ e, conseguentemente, la direzione X' è la direzione principale media $\hat{2}$ (Fig. 4.3(b)).

Infine, la normale \mathbf{w} al piano critico è definita mediante l'angolo di rotazione δ (funzione del rapporto tra i limiti di fatica del materiale) intorno all'asse $\hat{2}$ (Fig. 4.3(c)):

$$\delta = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\tau_{af,-1} / \sigma_{af,-1} \right)^2 \right] 45^\circ \quad (4.57)$$

dove $\sigma_{af,-1}$ è il limite di fatica per tensione normale alterna, e $\tau_{af,-1}$ è il limite di fatica per tensione tangenziale alterna.

4.4.2 PSD della tensione normale equivalente relativa al piano critico

Il tensore degli sforzi nel sistema di riferimento P_{uvw} relativo al piano critico (Fig. 4.3(c)), è descritto dal vettore delle tensioni $\mathbf{s}_{uvw}(t) = \{s_{1''}, s_{2''}, s_{3''}, s_{4''}, s_{5''}, s_{6''}\}^T = \{\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w, \tau_{uv}, \tau_{uw}, \tau_{vw}\}^T$. L'asse u è definito mediante l'angolo γ , che rappresenta una rotazione antioraria attorno all'asse w (Fig. 4.3(c)), in modo che u definisca quella direzione che massimizza la varianza della tensione tangenziale $\tau_{vw} = s_{6''6''}$:

$$\max_{0 \leq \gamma \leq 2\pi} \left[\sigma_{6'',6''}^2 \right] = \left[\max_{0 \leq \gamma \leq 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{6'',6''}(\omega, \gamma) d\omega \right] \quad (4.58)$$

essendo $S_{6'',6''}$ ottenuta attraverso la matrice della PSD function rispetto al sistema di riferimento $Puvw$:

$$\mathbf{S}_{x''y''z''}(\omega) = \mathbf{S}_{uvw}(\omega) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{S}_{xyz}(\omega) \tilde{\mathbf{C}}^T \quad (4.59)$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_\gamma^2 & s_\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 2c_\gamma s_\gamma \\ s_\gamma^2 & c_\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & -2c_\gamma s_\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ -c_\gamma s_\gamma & c_\gamma s_\gamma & 0 & 0 & 0 & c_\gamma^2 - s_\gamma^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\delta^2 & s_\delta^2 & -2c_\delta s_\delta & 0 & 0 \\ 0 & s_\delta^2 & c_\delta^2 & 2c_\delta s_\delta & 0 & 0 \\ 0 & c_\delta s_\delta & -c_\delta s_\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\delta & s_\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_\delta & c_\delta \end{bmatrix} \mathbf{C} \quad (4.60)$$

essendo $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi})$ la matrice di rotazione relativa agli angoli medi di Eulero $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$, cioè la matrice che si ottiene considerando i seguenti valori nell'Eq. (4.52): $c_\psi = \cos \hat{\psi}$, $s_\psi = \sin \hat{\psi}$, $c_\theta = \cos \hat{\theta}$, $s_\theta = \sin \hat{\theta}$, $c_\phi = \cos \hat{\phi}$ e $s_\phi = \sin \hat{\phi}$. Inoltre: $c_\gamma = \cos \gamma$, $s_\gamma = \sin \gamma$, $c_\delta = \cos \delta$ e $s_\delta = \sin \delta$.

Al termine di tale sequenza di rotazioni, si ottengono le PSD $S_{3'',3''} = S_{w,w}$ e $S_{6'',6''} = S_{vw,vw}$, relative a σ_w e τ_{vw} , rispettivamente.

Al fine di condurre la stima del danno a fatica in regime multiassiale in modo del tutto analogo a quanto avviene in regime monoassiale, si definisce una PSD function equivalente attraverso la seguente combinazione lineare:

$$S_{eq} = S_{3'',3''} + \left(\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}} \right) S_{6'',6''} = S_{w,w} + \left(\frac{\sigma_{af,-1}}{\tau_{af,-1}} \right) S_{vw,vw} \quad (4.61)$$

4.4.3 Valutazione della vita a fatica

Dopo aver ridotto lo stato tensionale multiassiale ad uno monoassiale equivalente, il modello di Tovo e Benasciutti (TB) (Tovo, 2002; Benasciutti, 2006), presentato dettagliatamente al Paragrafo 4.3, può essere applicato alla PSD function equivalente, S_{eq} (definita dall'Eq. (4.61)). In particolare, considerando come variabile da conteggiare una tensione monoassiale equivalente avente la PSD function di Eq. (4.61), il valore atteso di danno a fatica per unità di tempo $E[D_{RFC}]$ è valutato applicando il modello TB, mediante l'Eq. (4.43). Infine, essendo il danno a fatica per un processo stazionario costante e, considerando un danno critico pari all'unità, la vita a fatica può essere calcolata come segue:

$$T_{cal} = \frac{1}{E[D_{RFC}]} \quad (4.62)$$

4.5 L'effetto della scelta della giacitura del piano critico

Al fine di considerare l'influenza della giacitura del piano critico nella stima della resistenza a fatica, le differenti espressioni dell'angolo δ proposte da Łagoda e collaboratori (Łagoda, 2014) e presentate al Paragrafo 2.3.1, vengono qui riprese.

Uno degli obiettivi della presente Tesi è rappresentato dall'implementare all'interno del criterio, oggetto del presente Capitolo, le espressioni proposte da Łagoda e collaboratori. Pertanto, le espressioni di δ vengono inserite nell'algoritmo originale, scritto in linguaggio *Fortran* (Vantadori, 2015), al fine di esaminare se tali espressioni risultano in grado di migliorare la precisione del criterio nell'ambito della stima della vita a fatica.

4.5.1 Validazione dell'implementazione proposta

La validazione dell'implementazione proposta viene eseguita considerando dati sperimentali reperiti in letteratura e relativi a provini lisci realizzati in acciaio 18G2A, soggetti a carichi multiassiali random non proporzionali di flessione (σ_x) e torsione (τ_{xy}) (Marciniak, 2008). Tali storie di carico risultano caratterizzate da una frequenza di campionamento di 250 Hz e da una durata complessiva di 819.2 secondi.

Sono state considerate dagli Autori tredici diverse combinazioni delle storie di carico, caratterizzate da differenti valori del rapporto $\tau_{xy,max}/\sigma_{x,max}$. I dettagli relativi alle condizioni di carico sono riportati in *Tabella 4.1*, dove T_{exp} indica la vita a fatica determinata sperimentalmente.

Tabella 4.1 Condizioni di carico dei dati sperimentali analizzati.

Materiale	Combinazione carico No.	$\tau_{xy,max}/\sigma_{x,max}$	$\sigma_{x,max}$ [MPa]	$\tau_{xy,max}$ [MPa]	T_{exp} [s]
Acciaio 18G2A	1	0.189	475	90	30180 35940 35940
	2	0.274	475	130	23700 14400 24060
	3	0.358	475	170	11100 11880 13140
	4	0.442	475	210	10860 9360 10380
	5	0.214	420	90	97860 65280 84240
	6	0.310	420	130	42660 49260 43980
	7	0.405	420	170	30960 40140 42600
	8	0.500	420	210	9360 6240 10740
	9	0.394	330	130	471420 444780 395280
	10	0.515	330	170	108240 63120
	11	0.636	330	210	24660 47700
	12	0.680	250	170	154420 282540 134940
	13	0.840	250	210	118740 238800 146800

Le proprietà meccaniche e a fatica del materiale sono riportate in *Tabella 4.2* (Karolczuk, 2005; Marciniak, 2008).

Tabella 4.2 Proprietà meccaniche e a fatica del materiale analizzato

Acciaio 18G2A (Karolczuk, 2005; Marciniak, 2008)		
Modulo elastico	E [GPa]	210
Tensione di snervamento	σ_y [MPa]	357
Resistenza ultima a trazione	σ_u [MPa]	535
Limite a fatica per tensione normale alterna	$\sigma_{af,-1}$ [MPa]	270
Coefficiente curva $S-N$ per tensione normale alterna	C [MPa ^{7.2}]	$7.61 \cdot 10^{23}$
Pendenza curva $S-N$ per tensione normale alterna	k [-]	7.2
Limite a fatica per tensione tangenziale alterna	$\tau_{af,-1}$ [MPa]	170

Le PSD functions S_σ e S_τ delle sollecitazioni applicate sono caratterizzate da quattro picchi, di cui quello dominante si ha in corrispondenza di una frequenza pari a 28.8 Hz e pari a 30 Hz. A titolo di esempio, vengono riportate in *Figura 4.4* le PSD S_σ e S_τ della combinazione di carico No. 8 (*Tab. 4.1*).

In *Figura 4.5* sono riportate le PSD functions $S_{w,w}$, $S_{vw,vw}$ e S_{eq} per la combinazione di carico No. 8. Confrontando la *Figura 4.5(c)* con la *Figura 4.4*, si osserva che la PSD S_{eq} presenta otto picchi in corrispondenza delle frequenze dominanti degli spettri S_σ e S_τ delle sollecitazioni applicate.

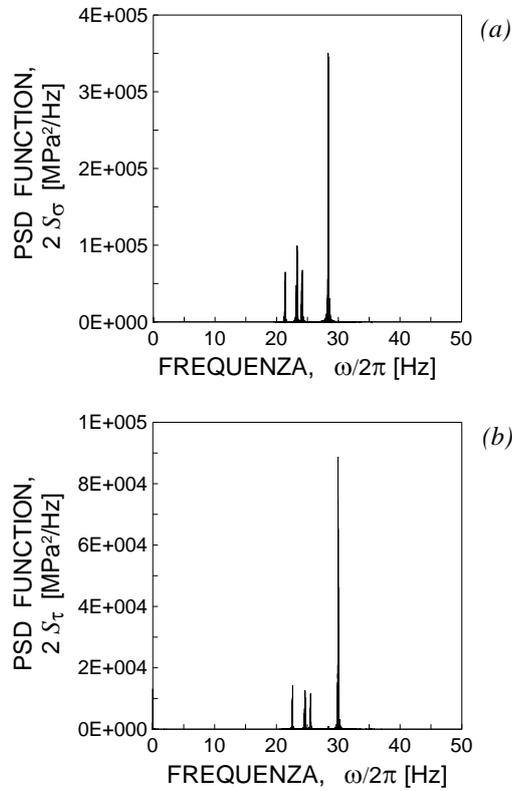


Figura 4.4 PSD functions S_σ e S_τ della combinazione di carico No. 8: flessione (a); torsione (b)

La Figura 4.6 mostra il confronto, in termini di vita a fatica, tra i dati sperimentali, T_{exp} , e i risultati numerici, T_{cal} , determinati impiegando il criterio discusso nel presente Capitolo e considerando le differenti espressioni di δ (si vedano l'Eq. (4.57) e le Eq. (2.18)-(2.21)). In particolare, si osserva una buona correlazione tra i dati sperimentali e le previsioni numeriche, come dimostrato dai risultati in generale contenuti nella banda di dispersione 3.

La precisione del criterio nell'ambito della stima della vita a fatica viene valutata impiegando il metodo dell'errore dello scarto quadratico medio, presentato al Paragrafo 2.3.2, e qui ripreso.

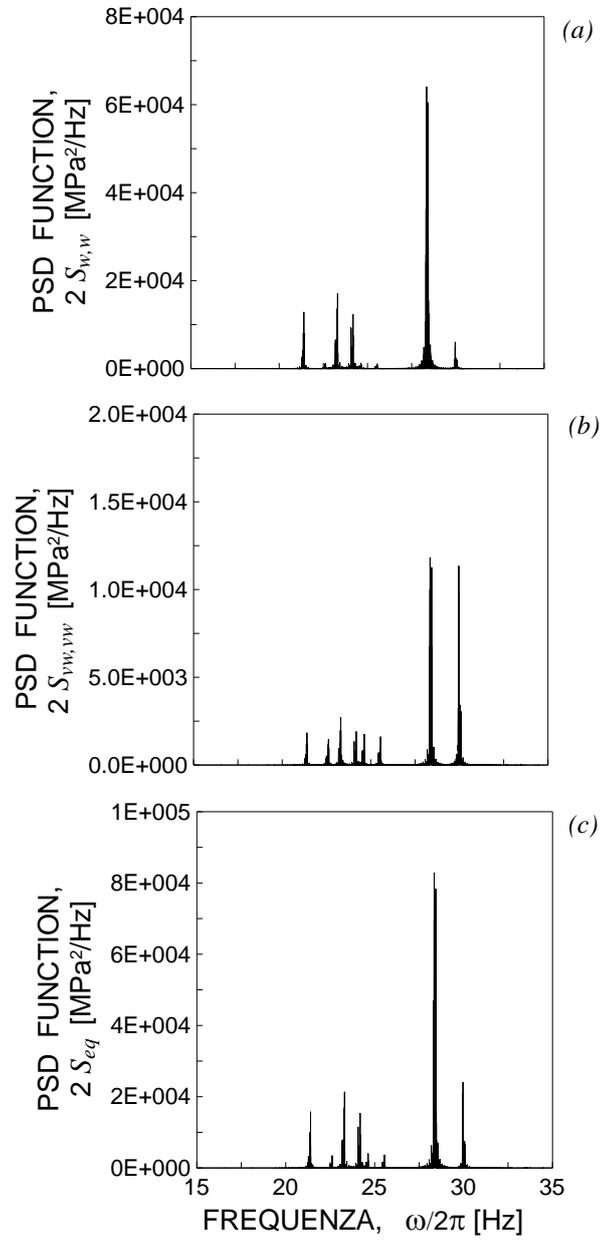


Figura 4.5 PSD functions: $S_{w,w}$ (a); $S_{vw,vw}$ (b); S_{eq} (c), per la combinazione di carico No. 8.

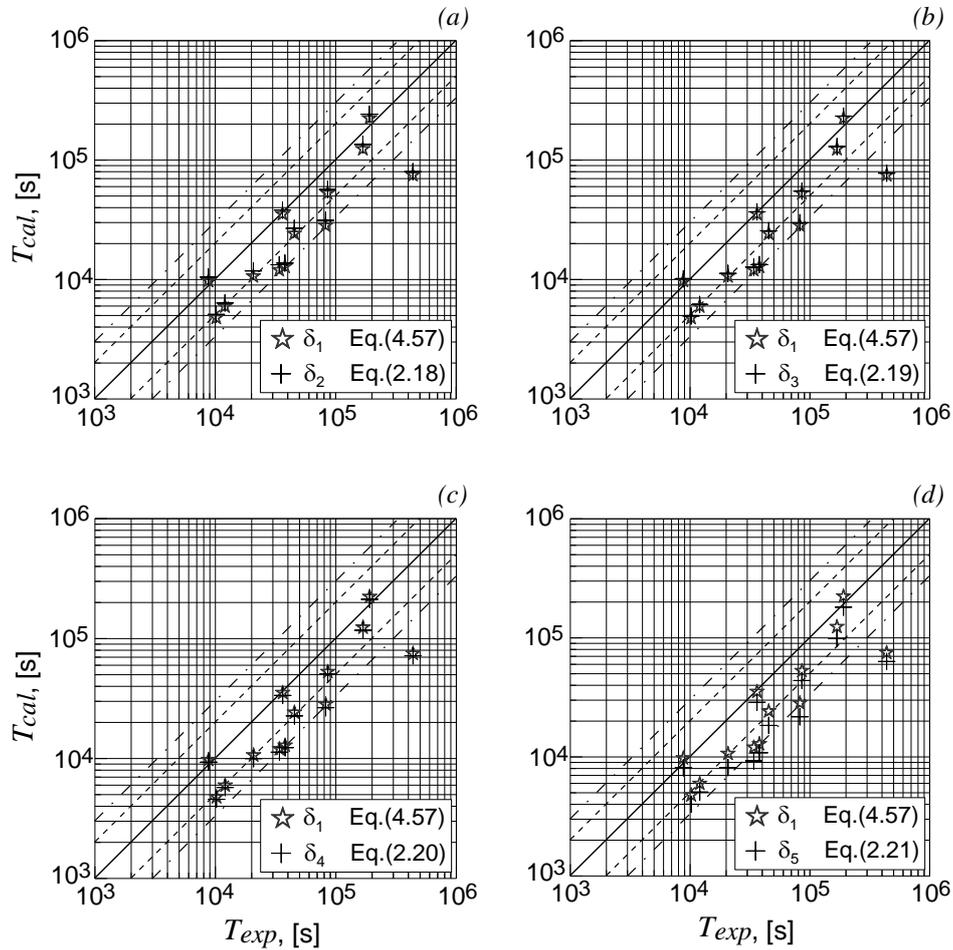


Figura 4.6 Confronti in termini di vita a fatica tra i risultati teorici, T_{cal} , e i dati sperimentali, T_{exp} , considerando la rotazione angolare: δ_1 e δ_2 (a); δ_1 e δ_3 (b); δ_1 e δ_4 (c); δ_1 e δ_5 (d).

In Figura 4.7 è riportato il valore dell'errore quadratico medio, T_{RMS} , ottenuto applicando alternativamente le cinque espressioni di δ discusse al Paragrafo 2.3.1. In particolare, l'analisi dei risultati indica che la precisione maggiore per la campagna sperimentale qui esaminata si ottiene impiegando $\delta = \delta_2$, essendo in questo caso il valore dell'errore quadratico medio pari a $T_{RMS} = 2.14$.

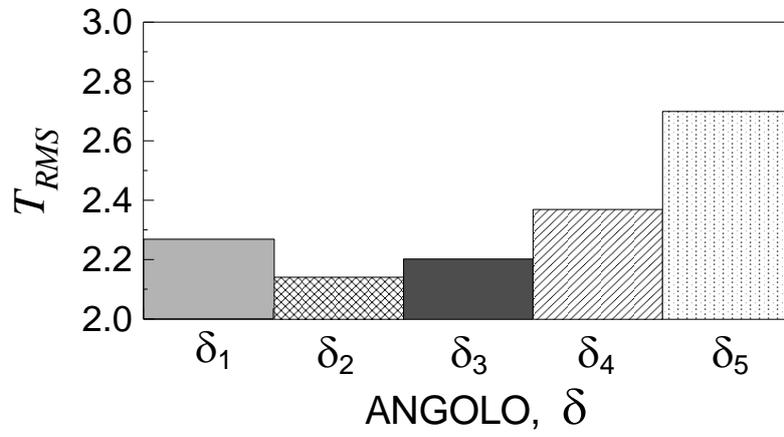


Figura 4.7 Errore quadratico medio, T_{RMS} , ottenuto variando l'espressione della rotazione angolare δ .

4.6 Bibliografia

- Benasciutti D., Tovo R. (2006) Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics* 21, 287-299.
- Bouyssy V., Naboishikov S.M., Rackwitz R. (1993) Comparison of analytical counting methods for Gaussian processes. *Structural Safety* 12, 35-57.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2003) A multiaxial fatigue criterion for random loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 26, 515-522.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2009) Fatigue life estimation under multiaxial random loading using a critical plane-based criterion. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Material and Component Performance under Variable Amplitude Loading*, Darmstadt, Germania, 475-484.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2011) Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. *International Journal of Fatigue* 33, 969-976.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. (2014) Reformulation in the frequency domain of a critical plane-based multiaxial fatigue criterion. *International Journal of Fatigue* 67, 55-61.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Ronchei C., Scorza D., Vantadori S. (2015a) Critical plane criterion for fatigue life calculation: time and frequency domain formulations. *Procedia Engineering* 101, 518-523.
- Carpinteri A., Spagnoli A., Ronchei C., Vantadori S. (2015b) Time and frequency domain models for multiaxial fatigue life estimation under random loading. *Frattura ed Integrità Strutturale* 33, 376-381.
- Cristofori A., Benasciutti D., Tovo R. (2011) A stress invariant based spectral method to estimate fatigue life under multiaxial random loading. *International Journal of Fatigue* 33, 887-899.
- Davenport A.G. (1964) Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 28, 187-196.
- Dirlik T. (1985) *Application of Computers in Fatigue Analysis*. Tesi di Dottorato, University of Warwick, UK.

- Dowling N.E. (1972) Fatigue failure predictions for complicated stress-strain histories. *Journal of Materials* 7, 71-87.
- Fissolo A., Gourdin C., Chen Y., Perez G., Stelmaszyk J.M. (2015) Investigations into the cumulative fatigue life of an AISI 304L austenitic stainless steel used for pressure water reactors: application of a double linear damage rule. *International Journal of Fatigue* 77, 199-215.
- Frendahl M., Rychlik I. (1993) Rainflow analysis - Markov method. *International Journal of Fatigue* 15, 265-272.
- Halfpenny A. (1999) A frequency domain approach for fatigue life estimation from Finite Element Analysis. In: *International Conference on Damage Assessment of Structure (DAMAS 99)*, Dublin.
- Karolczuk A., Macha E. (2005) Fatigue fracture planes and expected principal stress directions under biaxial variable amplitude loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 28, 99-106.
- Łagoda T., Macha E. (1994) Estimated and experimental fatigue life of 30CrNiMo8 steel under in- and out-of-phase combined bending and torsion with variable amplitudes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 17, 1307-1318.
- Łagoda T., Macha E., Niesłony A. (2005) Fatigue life calculation by means of the cycle counting and spectral methods under multiaxial random loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*. 28, 409-420.
- Łagoda T., Walat K. (2014) Lifetime of semi-ductile materials through the critical plane approach. *International Journal of Fatigue* 67, 73-77.
- Lutes L.D., Corrao M., Hu S.J., Zimmerman J. (1984) Stochastic fatigue damage accumulation. *Journal of Structural Engineering ASCE* 110, 2585-2601.
- Lutes L.D., Sarkani S. (1997) *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*. Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C.M. (1986) *Methods of Structural Safety*. Prentice-Hall, USA.
- Marciniak Z., Rozumek D., Macha E. (2008) Fatigue lives of 18G2A and 10HNAP steels under variable amplitude and random non-proportional bending with torsion loading. *International Journal of Fatigue* 30, 800-813.

-
- Miner M.A. (1945) Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* 67, A159-A164.
- Neri P., Peeters B. (2015) Non-Harmonic Fourier Analysis for bladed wheels damage detection. *Journal of Sound and Vibration* 356, 181-194.
- Niesłony A., Macha E. (2007) *Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue*. Springer, Berlin.
- Pitoiset X., Preumont A. (2000) Spectral Methods for Multiaxial Random Fatigue Analysis of Metallic Structures. *International Journal of Fatigue* 22, 541-550.
- Rice S.O. (1945) Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal* 24, 46-156.
- Rychlik I. (1993) On the 'narrow-band' approximation for expected fatigue damage. *Probabilistic Engineering Mechanics* 8, 1-4.
- Tanegashima R., Ohara I., Akebono H., Kato M., Sugeta A. (2015) Cumulative fatigue damage evaluations on spot-welded joints using 590 MPa-class automobile steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 38, 870-879.
- Tovo R. (2002) Cycle distribution and fatigue damage under broad-band random loading. *International Journal of Fatigue* 24, 1137-1147.
- Vantadori S., Carpinteri A., Ronchei C., Scorza D. (2015) A frequency-domain HCF criterion for biaxial random loading. In: *Proceedings 4th International Conference of Engineering Against Failure (ICEAF IV)*, Skiathos, Grecia.
- Wang C.H., Brown M.W. (1996) Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - Part 1: Theories. *Journal of Engineering Materials and Technology* 118, 367-370.
- Wirsching P.H., Light C.L. (1980) Fatigue under wide band random stresses. *Journal of Structural Division ASCE* 106, 1593-1607.
- Wolfsteiner P., Breuer W. (2013) Fatigue assessment of vibrating rail vehicle bogie components under non-Gaussian random excitations using power spectral densities. *Journal of Sound and Vibration* 332, 5867-5882.
- Zhao W., Baker M.J. (1992) On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes. *International Journal of Fatigue* 14, 121-135.

I miei più sentiti ringraziamenti vanno alla Professoressa Sabrina Vantadori per il prezioso tempo che mi ha dedicato durante il dottorato, per la fiducia dimostratami e soprattutto per avermi insegnato ad affrontare il lavoro con grande professionalità e profonda passione.

Inoltre, desidero ringraziare il Professore Andrea Carpinteri per la sua infinita disponibilità e per i saggi consigli che mi ha generosamente elargito in questi anni.

Infine, un caro grazie alla mia collega Ingegnere Daniela Scorza per la stretta collaborazione e soprattutto per il suo immancabile supporto.