Essays in Macroeconomics

Tesi di Dottorato in Economia

Ciclo XXIV

Filippo Rebessi

Dipartimento di Economia,

Universita' degli Studi di Parma,

Parma, Italia

Novembre 2012

Abstract

This work makes a joint analysis of prevention and saving decisions. First we determine the optimal levels of the two variables and we analyze substitution between them. Second we provide some results about the effects on optimal saving and prevention of changes in exogenous present and future wealth and in possible future loss. Finally we introduce insurance into the model and we extend the separation result, derived in the literature which studies the substitution between insurance and saving, to the case where prevention is considered too.

On the substitution between saving and prevention

Mario Menegatti

Dipartimento di Economia,

Università degli Studi di Parma,

Parma, Italy,

Filippo Rebessi

Dipartimento di Economia,

Università degli Studi di Parma,

Parma, Italy,

January 11, 2013

1 Introduction

Economic models usually assume that agents dislike risk **and specify the type of behavior that agents adopt** in order to deal with it. The three main instruments used for this purpose are: prevention, insurance and saving. Prevention of a risk by an agent can be defined as the effort exerted by the agent in order to lower the probability of the occurrence of an event generating a loss in wealth.[1] Insurance is a different instrument by which an agent pays in advance a certain given monetary **amount**, called "insurance premium", in exchange for a payment to be received in the case of the occurrence of a predetemined event generating a loss in wealth.[2] Finally saving, which can be studied only when a **multi-periodal** framework is considered, can be defined as a trasfer of wealth from the present to the future which usually involves a return, proportional to the transfer and determined by the interest rate. This third instrument, which is used in the certainty case for consumption smoothing,[3] was also shown to be useful in order to manage risk by the so-called "precautionary saving" literature.[4]

[1]Prevention was first studied by Erlich and Becker (1972). Many other relevant works in this field are quoted below in this section.

[2]Starting from the seminal work by Pratt (1964), the attitude toward insurance of a risk averse agent is studied by a large literature. For a survey on this see, for instance, Gollier (2001).

[3]See on this the wide literature starting from Hall (1988).

[4]See Leland (1968), Sadmo (1970), Kimball (1990) and Menegatti (2001).

Since **all** these different instruments can be used in a risky context, some cases of interaction and substitution among them were studied in the literature. The interaction between prevention and saving was originally analyzed by Erlich and Becker (1972), who study the substitution effects between insurace, self-insurance and prevention in an expected utility model where prevention has a simultaneous effect on the probability of the loss.[5] In this framework, insurance and self-insurance are shown to be definitely substitutes, while insurance and prevention can be complements because of their mutually related effects on moral hazard. Furthermore Dionne and Eeckhoudt (1985) show that the effects of an increase in risk aversion on prevention **and insurance choices are different**, while Brys and Schlesinger (1990) show that this occurs **because of** the different consequences of prevention and insurance on the risky distribution of wealth .[6] Finally Julien et al. (1999) and Dionne and Li (2010) provide conditions ensuring that prevention has a plausible reaction to a change in the degree of risk aversion.

When a two-period framework is analyzed, a different problem which can be studied is the interaction between insurance and saving. This issue first examined by Moffet (1975 and 1977) under restrictive assumptions and then by Dionne and Eeckhoudt (1984) in a generalized framework. Dionne and Eeckhoudt (1984), in particular, found that a complementary or substitution effect between prevention and saving cannot be unambiguously established, in general, while perfect substitution occurs under the assumption of decreasing temporal risk aversion. Finally they show that, in the case of fair insurance premium, there is a separation between the two instruments: insurance is completely devoted to removing risk and saving is used for consumption smoothing.

While the interactions between prevention and insurance and between saving and insurance have been analyzed in the literature, the relationship between prevention and saving has not been treated yet. This is because in the literature quoted above prevention has been **considered** only as an instrument whose effects occur simultaneously on the probability of a loss in wealth; in fact, prevention tends to be considered only in a single-period framework. Since saving is defined only in a two-period framework **a model that allows for prevention and saving to be analyzed together has not been specified yet**.

However, a prevention model in a two-period framework was recently studied by Menegatti (2009). In fact, as noted by Menegatti:

"in many situations, the effort in prevention is not contemporaneous with its effect on probability; it precedes this effect. This happens in cases such as the following three:

[5] Erlich and Becker (1992) distinguish insurance, which is brought in the market, from self-insurance, which is a costly behaviour reducing the size of the loss in the case of the occurrence of the "bad" event.

[6] This works shows in particular that insurance induces a mean-preaserving contraction in the sense of Rotschild and Stiglitz (1971) in the risky ditribution of wealth while prevention does not

a) if a driver attends a safe-driving course today, this reduces the probability of a car accident in the future;

b) if a householder buys a house alarm today, this reduces the probability of a burglary in the future;

c) if a smoker gives up smoking today, this reduces the probability of disease in the future.

Clearly, in these cases the usual one-period framework cannot be used to analyse the optimal level of prevention. A two-period framework is suitable." [Menegatti (2009), p. 394]. [7]

This new framework allows to study the interaction between prevention and saving in managing risk, which was until now neglected in the literature. This analysis is the aim of this work. We have in particular three main goals. First we formalize a model where prevention and saving are used together, we determine the optimal levels of the two choice variables and we analyse substitution or complementarity between them. Second we study the effects on optimal saving and prevention of changes in exogenous present and future wealth and in the possible future loss in order to examine the consequences in equilbrium of a variation in exogenous variables. Finally we analyze the effect of the introduction of insurance into the model under the assumption of fair premium and we extend the Dionne and Eeckhoudt (1984) separation result to the case where prevention is considered.

The paper is organized as follows. Section 2 presents the model. Section 3 examines substitution between prevention and saving. Section 4 provides results for changes in exogenous variables. Section 5 shows the extended separation result. Section 6 concludes.

2 The model

We assume that an agent is facing a risk about her future wealth. For simplicity we formalize this idea by considering a two-period framework where period 0 represents the "present" and period 1 represents the "future". We also assume that wealth in period 0 is certain, while in period 1 the agent faces two states of the world. In the "bad" one (which occurs with probability $p \in (0, 1)$), the agent incurs the loss l and in the "good" one (which occurs with probability $1 - p$) there is no loss. Thus, given the endowment wealth w_0 in period 0 and w_1 in period 1, total wealth in period 0 is equal to w_0 while total wealth in period 1 is equal to $w_1 - l$ with probability p and to w_1 with probability $1 - p$. We assume that $w_0, w_1 \in R^+$ and that $l \in (0, w_1)$.

We also assume that in each period agent's preferences are described by the utility function $u(.)$: $R^+ \to R^+$ which is assumed to belong to the class of C^2 functions (twice differentiable functions with

[7] Menegatti (2009) shows that, in a two-period framework, prudence, i.e. a positive third derivative of the utility function, has an increasing effect on optimal prevention. Conversely, Eeckhoudt and Gollier (2005) previously concluded that the opposite occurs in a one-period framework. Finally note that a new application in the study of prudence of the model introduced by Menegatti (2009) was recently provided in an unpublished paper by Eeckhoudt et. al. (2010)

continuous second derivatives).The argument of function $u(.)$ in each period is total wealth in that period.As usual in economic problems studying a risky context, function $u(\,.\,)$ is assumed to be strictly increasing and strictly concave, that is $u'(\,.\,) > 0$ and $u''(\,.\,) < 0$; this last assumption indicates risk aversion. Agent's total utility $V(.)$ is given by the sum of utility of period 0 and utility of period 1. In the absence of instruments usable to deal with risk, total utility is thus given by

$$V = u\left(w_0\right) + \frac{1}{(1+\rho)}\left[pu\left(w_1 - l\right) + (1-p)u\left(w_1\right)\right] \tag{1}$$

where $\rho \in [0, 1)$ is the so-called subjective discount rate which is introduced (as usually in two-period models) in order to formalize the idea that the agent cares about the present more than about the future.

In this framework we introduce two instruments used by the agent in order to deal with risk. The first instument is prevention which, coherently with the definition in Section 1, implies to exert an effort e in order to reduce the probability of the occurrence of the loss l. As in all previous work about prevention (see Erlich and Becker, 1972; Dionne and Eeckhoudt, 1985; Brys and Schlesinger, 1990; Julien et al., 1999; Eeckhoudt and Gollier, 2005; Menegatti, 2009 and Dionne and Li, 2010), we assume that the effort e can be simply measured as a reduction in wealth. This assumption is more plausible in some cases and less in other cases but it is standard in the literature. On this point see also the discussion in the last section.

Following Menegatti (2009), when only prevention is available to deal with risk, agent's total utility is given by[8]

$$V(e) = u\left(w_0 - e\right) + \frac{1}{(1+\rho)}p(e)u\left(w_1 - l\right) + [1 - p(e)]u\left(w_1\right) \tag{2}$$

where $e \in R^+$ and where $p(.) : R^+ \to (0, 1)$ and is C^2. We also assume $p'(e)$ to be strictly negative, so that an increase in effort causes a reduction in the probability of the loss. Note that in this case, effort e is the choice variable for the agent and total utility depends thus on the level of e. In this framework the agent chooses e in order to maximise $V(e)$.

A second instrument which can be used to deal with risk in a two-period framework is saving. Coherently with the definition in Section 1, saving allows to transfer wealth from period 0 to period 1 and usually implies a return, represented by the interest rate r. Following the literature on precautionary saving cited in Section 1, when only saving is available to deal with risk, agent's total utility is given by

$$V(s) = u\left(w_0 - s\right) + \frac{1}{(1+\rho)}\left[pu\left(w_1 + s(1+r) - l\right) + (1-p)u\left(w_1 + s(1+r)\right)\right] \tag{3}$$

[8]Note that for simplicity Menegatti(2009) assumed $\rho = 0$.

where $s \in R^+$ and $r \in [0,1)$. In this case, s is the choice variable for the agent and total utility depends thus on s. In this framework the agent chooses s in order to maximize $V(s)$.

The aim of this work is to study a framework where the agent can contemporaneously use the two instruments of prevention and saving and to study the **existence of a substitution effect** between them. **For this case it is straightforward to define from (2) and (3), which describe respectively the case of prevention and saving alone, a new expression for agent's total utility, that is given by**

$$V(s,e) = \left\{ u\left(w_0 - s - e\right) + \frac{p(e)u\left(w_1 + s(1+r) - l\right) + [1-p(e)]u\left(w_1 + s(1+r)\right)}{(1+\rho)} \right\} \tag{4}$$

In this case both s and e are choice variables for the agent and total utility depends on both e and s. In this framework the agent chooses s and e in order to maximize $V(s,e)$ Total utility maximisation thus implies

$$\underset{s,e}{max} V(s,e) = \underset{s,e}{max} \left\{ u\left(w_0 - s - e\right) + \frac{p(e)u\left(w_1 + s(1+r) - l\right) + [1-p(e)]u\left(w_1 + s(1+r)\right)}{(1+\rho)} \right\} \tag{5}$$

Given problem (5), we get the two following first-order conditions:[9]

$$u'(I_0) = \left\{p(e)u'\left(I_{1B}\right) + [1-p(e)]u'\left(I_{1G}\right)\right\} \frac{1+r}{1+\rho} \tag{6}$$

$$u'(I_0) = p'(e)\frac{u(I_{1B}) - u(I_{1G})}{1+\rho} \tag{7}$$

where $I_0 = w_0 - s - e$, $I_{1B} = w_1 + s(1+r) - l$, $I_{1G} = w_1 + s(1+r)$. It is worth noticing that if $I_{1B} = I_{1G}$, i.e. $l = 0$, there is no incentive to exert any effort. Conversely, the bigger the wealth gap between the two states of the world in period 1, the greater the benefit from exerting effort in the present.

The second-order conditions are

$$V_{ss} = u''(I_0) + [p(e)u''(I_{1B}) + [1-p(e)]u''(I_{1G})] \frac{(1+r)^2}{1+\rho} < 0 \tag{8}$$

$$V_{ee} = u''(I_0) + p''(e)\frac{[u(I_{1B}) - u(I_{1G})]}{1+\rho} < 0 \tag{9}$$

$$V_{ss}V_{ee} - \left(V_{se}\right)^2 > 0 \tag{10}$$

where $V_{ss} = \frac{\partial^2 V(e,s)}{\partial s^2}$,$V_{ee} = \frac{\partial^2 V(e,s)}{\partial e^2}$ and $V_{se} = \frac{\partial^2 V(s,e)}{\partial e \partial s}$.

While (8) is automatically satisfied by the concavity of $u(\,.\,)$, a sufficient condition for $V_{ee} < 0$ is $p(e)$

[9] Note that the assumption on function $u(.)$ ensures the differentiability of $V(s,e)$ with regard to s and e.

to be convex in e. This assumption is quite natural since it generates the plausible implication that the marginal effect of prevention is decreasing for $p(e)$ approaching 1. For these reasons we explicitly assume $p''(e) > 0$.

Note that with this assumption on $p(.)$, equations (8), (9) and (10) characterize a negative definite Hessian matrix, so that the pair (p^*, e^*) satisfying (6) and (7) achieves indeed a maximum. As a remark, note that we are relying on the fact that first order and second order conditions are sufficient to characterize a solution to (5), as it's usually assumed in this literature. This follows from our choice of the state space of both our choice variables and of the parameters, that is a subset of the real coordinate space R^n, equipped with euclidean metric, and on the differentiability of $u(.)$ and $p(.)$

3 Substitution between prevention and saving

As pointed out above, equations (6) and (7) together determine the set of equilibrium pairs (e, s) ensuring that agent's utility is maximised. If an equilibrium exists, though, it is not necessarily unique. In fact, looking at the expressions of the first-order conditions, it is clear that the number of equilibria depends on various factors, including the assumptions on the third derivative of the utility function with respect to saving (i.e. agent's attitude toward "prudence"), and on the third derivative of the function $p(e)$.

Although we do not know how many equilibria exist, the comparison between them allows us to get some early indications on the substitability between effort and saving. In particular, we have that:

Proposition 3.1. *Consider the set of equilibrium pairs and assume that there exist N equilibrium pairs (e_i, s_i) with $i = 1, .., N$. If $e_k > e_j$ with $k \neq j$, then $s_k < s_j$.*

Proof. By totally differentiating (6) we get

$$\frac{ds}{de} = \frac{-u''(I_0) - p'(e)\left[u'(I_{1B}) - u'(I_{1G})\right]\frac{1+r}{1+\rho}}{u''(I_0) + p(e)u''(I_{1B}) + (1-p(e))\,u''(I_{1G})\frac{(1+r)^2}{1+\rho}} < 0 \tag{11}$$

This means that (6) implies in equilibrium $s = f(e)$ with $f'(e) < 0$. This proves the proposition. □

Proposition 3.1 shows that, assuming that multiple equilibrium pairs (e, s) exist and comparing these different equlbria, there is a negative relationship between e and s. This means that, moving from one equilibrium to another, we have a substitution effect between prevention and saving (**i.e.** larger prevention implies smaller saving).

Another conclusion in the same direction can be obtained by explaining the effect on e and s of an exogenous change in the interest rate r. Indeed, since the interest rate is the return of saving, the responses of the two variables of choice to a change in it provide a further indication on the substitability between them. In order to do this, we totally differentiate (6) and (7) with respect to the endogenous variables e and s and the exogenous interest rate r, obtaining:

$$V_{ee}de + V_{es}ds = -V_{er}dr \tag{12}$$

$$V_{es}de + V_{ss}ds = -V_{sr}dr \tag{13}$$

where

$$V_{er} = \frac{\partial^2 V(e,s)}{\partial e \partial r} = p'(e)[u'(I_{1B}) - u'(I_{1G})]\frac{s}{1+\rho} < 0, \tag{14}$$

$$V_{sr} = \frac{\partial^2 V(e,s)}{\partial s \partial r} = \frac{s(1+r)}{1+\rho}\left\{p(e)\left[u''(I_{1B})\right] + \left[1-p(e)\right]u''(I_{1G})\right\} + \frac{1}{1+\rho}\left\{p(e)\left[u'(I_{1B})\right] + \left[1-p(e)\right]u'(I_{1G})\right\} \tag{15}$$

and

$$V_{es} = u''\left(I_0\right) + p'(e)\left[u'\left(I_{1B}\right) - u'\left(I_{1G}\right)\right]\frac{1+r}{1+\rho} < 0 \tag{16}$$

With simple manipulations, we get

$$\frac{de}{dr} = \frac{1}{D}\left(V_{es}V_{sr} - V_{er}V_{ss}\right) \tag{17}$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{D}\left(V_{es}V_{er} - V_{sr}V_{ee}\right) \tag{18}$$

where $D = V_{ee}V_{ss} - (V_{es})^2$, which is greater than 0 by the second-order conditions. Since the sign of V_{sr} is ambiguous, the signs of $\frac{de}{dr}$ and $\frac{ds}{dr}$ are ambiguous too. We thus try to solve the ambiguity of the sign V_{sr}.

The derivative V_{sr} measures the effect of a change in the optimal level of saving due to a change in r. In order to study this effect in more detail, we look to the simpler case where we have no uncertainty (and thus obviously no prevention). In this case the agent's problem becomes[10]

$$\underset{s}{max} V(s) = \underset{s}{max}\left\{u(w_0 - s) + u\left(w_1 + s(1+r)\right)\frac{1}{1+\rho}\right\} \tag{19}$$

The first-order condition of this problem is

$$u'(w_0 - s) = u'(w_1 + s(1+r))\frac{1+r}{1+\rho} \tag{20}$$

[10]This is clearly the case of equation (3) when $p = 0$.

implying

$$V_{sr} = u''(w_1 + s(1+r))\frac{s(1+r)}{1+\rho} + u'(w_1 + s(1+r))\frac{1}{1+\rho} \tag{21}$$

Note that the sign of the expression V_{sr} is ambiguous. This ambiguity depends on the contemporaneous presence of two effects: the substitution effect between present and future consumption related to a change of r (represented by the term $u'\left(w_1 + s(1+r)\right)\frac{1}{1+\rho}$) and the income effect due to the increase of r (represented by the term $u''\left(w_1 + s(1+r)\right)\frac{s(1+r)}{1+\rho}$). It seems plausible to assume that the first effect prevails. If this occurs, $V_{sr} > 0$.

Examining (15), it is clear that the two terms in it are similar to those in (21). For this reason we have that if the substitution effect on s of a change in r prevails on the income effect, we get $V_{sr} > 0$ also in the framework with uncertainty of (15). This, together with (17) and (18) implies in turn

Proposition 3.2. *If the substitution effect on s of a change in r prevails on the income effect due to the change, then an increase in r raises s ($\frac{ds}{dr} > 0$) and reduces e ($\frac{de}{dr} < 0$).*

Proposition 3.2 shows that when the interest rate increases, we have that, under plausible conditions, saving increases and prevention decreases. Since the interest rate is the return of saving, this confirms the conjecture that the two instruments are substitutes.

4 Changes in the size of present wealth, future wealth or possible future loss

We now examine the effect of a change in w_0, w_1 or l on the optimal choice of saving and prevention by computing $\frac{ds}{dw_0}$, $\frac{de}{dw_0}$, $\frac{ds}{dw_1}$, $\frac{de}{dw_1}$, $\frac{ds}{dl}$ and $\frac{de}{dl}$.

In general the sign of all these derivatives is ambiguous. This result is due to the interaction between the two instruments in pursuing the agent's two objectives: to smooth consumption between the two periods and to face uncertainty. Note that this result is analogous to the conclusion reached by Dionne and Eeckhoudt (1984), who find that changes in different parameters have, in general, ambiguous effects on the optimal levels of insurance and saving.

Given this premise, some specific conclusions can be obtained by introducing some conditions on the parameters and the functions of the model. Consider, in particular, the three following conditions:

$$p'(e)\left[u'(I_{1B}) - u'(I_{1G})\right] > \left\{p(e)u''(I_{1B}) + [1-p(e)]u''(I_{1G})\right\}(1+r) \tag{22}$$

$$p'(e)\left[u'(I_{1B}) - u'(I_{1G})\right](1+r) > p''(e)\left[u(I_{1B}) - u(I_{1G})\right] \tag{23}$$

$$p'(e)u'(I_{1B}) > p(e)u''(I_{1B})(1+r) \tag{24}$$

Given conditions (22), (23) and (24), it is possible to show that

Proposition 4.1.

- *If inequality (22) is satisfied, then* $\frac{de}{dw_0} > 0$ *and* $\frac{de}{dw_1} > 0$*. If the opposite of inequality (22) is satisfied, then* $\frac{de}{dw_0} < 0$ *and* $\frac{de}{dw_1} < 0$*.*
- *If inequality (23) is satisfied, then* $\frac{ds}{dw_0} > 0$*. If the opposite of inequality (23) is satisfied, then* $\frac{ds}{dw_0} < 0$*.*
- *If inequalities (22) and (23) are satisfied, then* $\frac{ds}{dw_1} < 0$*. If the opposite of inequalities (22) and (23) is satisfied, then* $\frac{ds}{dw_1} > 0$*.*
- *If inequality (22) and the opposite of inequality (24) are satisfied, then* $\frac{de}{dl} > 0$*. If the opposite of inequality (22) and inequality (24) are satisfied, then* $\frac{de}{dl} < 0$*.*
- *If inequalities (23) and (24) are satisfied, then* $\frac{ds}{dl} > 0$*. If the opposite of inequalities (23) and (24) is satisfied, then* $\frac{ds}{dl} < 0$*.*

Proof. See the Appendix. □

The three conditions represent the comparison between the efficiency of the two instruments with regard to different aspects. In particular, condition (22) compares the impact of a (infinitesimally small) variation of e and s on marginal intertemporal utility of saving.[11] Similarly, condition (23) compares the impact of a (infinitesimally small) variation of e and s on marginal intertemporal utility of prevention.[12] Finally, condition (24) compares the impact of a (infinitesimally small) variation of e and s on marginal intertemporal utility of saving in the bad state of the world.[13]

Given this interpretation, Proposition 4.1 shows how the sign of changes in s and e caused by changes in w_0, w_1 and l depends on the relative efficiency of the two instruments in affecting marginal intertemporal utility. In case of a change in w_0 and in w_1, all the relevant conditions refers to both states of the world. In case of a change in l, the condition on marginal utility of saving depends only on the efficiency in the bad state.

[11] Note that the left-hand side and the right-hand side of (22) are the derivatives of (6), i.e the first-order condition referred to saving, respectively with regard to e and s.

[12] Note that the left-hand side and the right-hand side of (23) are the derivatives of (7), i.e the first-order condition referred to prevention, respectively with regard to s and e.

[13] Note that the left-hand side and the right-hand side of (24) are the derivatives of (6), i.e. the first-order condition referred to saving, respectively with regard to s and e, considering just the bad state of the world.

5 Extended separation result

As anticipated in Section One, Dionne and Eeckhoudt (1984) examine the substitution between insurance and saving in a two-period model. One of their main results shows that the introduction of a fair (or actuarial) insurance premium determines a "separation" between insurance and saving. In this case, in fact, agents choose to buy full insurance, using this instrument in order to face uncertainty. The other instrument (i.e. saving) is thus used only for the purpose of consumption smoothing between the two periods.

This separation result obviously does not hold in a context of unfair (or non-actuarial) premia. In this case, it is no longer necessarily true that insurance is the most efficient instrument to cover future losses, so saving is both an instrument to smooth consumption as well as a substitute for insurance in protection against future losses.

It can be shown that our framework too yield a separation result. In fact, introducing insurance with a fair premium into our model implies the determination of different specific goals for insurance, prevention and saving.

As explained in the introduction, insurance is a typical instrument used to deal with risk. Coherently with its definition, insurance involves a cost called premium, which is substained by the agent in order to receive a payment if the "bad state" of the world occurs (i.e. if she incurs the loss). Letting X for this payment, we assume that it is positive and not larger than the possible loss l, so that $X \in [0, l]$. When $X = l$ we said we have "full insurance". Following Dionne and Eeckhoudt (1984), we assume that the premium is payed in period 0 and that it is equal to the discounted expected cost for the insurer,[14] multiplied by a factor loading $\mu \in [1, +\infty)$. When $\mu = 1$ the insurance premium is said "fair".[15]

When insurance is the only instrument to deal with risk, agent's total utility is given by

$$V(X) = u\left(w_0 - \mu \frac{pX}{1+r}\right) + \frac{1}{(1+\rho)}\left[pu\left(w_1 - l + X\right) + (1-p)u\left(w_1\right)\right] \tag{25}$$

Note that $\frac{pX}{1+r}$ is the discounted expected payment by the insurer. The level of insurance X is the choice variable for the agent and total utility depends thus on X. In this framework the agent chooses X in order to maximize $V(X)$.

Given this premise, we can now introduce insurance in our framework together with prevention and saving. Allowing for the presence of insurance in our model would result in the following expression

[14] The discount is here a financial discount, so it is computed by using the interest rate.

[15] This is the case in a perfectly competitive insurance market.

for the agent's problem:

$$\max_{s,e,X}\left\{u\left(w_0-s-e-\mu\frac{p(e)X}{1+r}\right)+\frac{p(e)u\Big(w_1+s(1+r)-l+X\Big)+[1-p(e)]u\Big(w_1+s(1+r)\Big)}{(1+\rho)}\right\} \tag{26}$$

From (26) we get the following first-order conditions:[16]

$$u'(I_0)=\frac{p'(e)\left[u(I_{1B})-u(I_{1G})\right]}{1+\mu\frac{p'(e)X}{1+r}}\frac{1}{1+\rho} \tag{27}$$

$$u'(I_0)=\left\{p(e)u'(I_{1B})+\left[1-p(e)\right]u'(I_{1G})\right\}\frac{1+r}{1+\rho} \tag{28}$$

$$u'(I_0)=\frac{1}{\mu}u'(I_{1B})\frac{1+r}{1+\rho} \tag{29}$$

where we have now $I_0=w_0-s-e-\mu\frac{p(e)X}{1+r}$, $I_{1B}=w_1+s(1+r)-l+X$ and $I_{1G}=w_1+s(1+r)$. Combining (28) and (29), we obtain the following condition

$$\frac{u'(I_{1G})}{u'(I_{1B})}=\frac{1-p(e)\mu}{\mu\left[1-p(e)\right]} \tag{30}$$

From (30) it is cleat that, when the insurance premium is fair, i.e. when $\mu=1$, $u'(I_{1G})$ must equal $u'(I_{1B})$, which implies

$$X=l \tag{31}$$

By using (27), (28) and (31) we get [17]

$$p'(e)=-\frac{1+r}{l} \tag{32}$$

and

$$u'\left(w_0-s-e-\frac{p(e)l}{1+r}\right)=u'\Big(w_1+s(1+r)\Big)\frac{1+r}{1+\rho} \tag{33}$$

Equations (31),(32) and (33) show the specific goal for each instrument.

First, equation (31) shows that the agent chooses a level of insurance equal to her loss, implying that she chooses full insurance. This means that insurance is used by the agent to completely remove uncertainty.

Given full insurance, the choice of the level of prevention does not influence future wealth, which is now certain. This choice, however, affects present wealth in two opposite directions since it determines the level of the fair premium and the cost due to effort exerted. In particular, a larger e implies both a

[16]Note that the first of these conditions requires $p'(e)$ to belong to $\Big(-\frac{1+r}{\mu X},0\Big)$ since the denominator of the right-hand side cannot be negative.

[17]This is clear since, by substituting (31) in (27), we get $u'(I_0)[1+\mu\frac{p'(e)l}{1+r}]=0$.

larger effort exerted (reducing wealth in period 0) and a smaller fair premium $\frac{p(e)l}{1+r}$, (increasing wealth in period 0). The choice of e in equation (32) ensures that the balance between these two effects is such that the quantity $-\frac{p(e)l}{1+r} - e$ is minimized, and thus that wealth in period 0 is maximized (with regard to e). In other words the choice of e is such that the insurance premium paid is reduced until the marginal benefit from this reduction is larger than the marginal effort necessary to obtain it.

Finally, given full insurance and optimal prevention determined by (32), the agent has to choose the optimal allocation of consumption between the two periods. This is ensured by the level of saving determined in equation (33), where (given e from (32)) the expected marginal utilities in the two periods are equalised by the choice of s. Saving is thus dedicated to the purpose of consumption smoothing.

The extended separation result just described also provides a clear indication with regard to changes in the level of exogenous variables in the case of fair insurance premium. In particular, in this case, it is easy to see that optimal insurance X is determined by the level of the loss l. Obviously, since we desire full insurance, an increase in loss implies an increase in the insurance level.

Optimal prevention e is affected by l and r. In particular, since $p'(e) < 0$ and $p''(e) > 0$ it is clear that we have $\frac{de}{dl} > 0$ and $\frac{de}{dr} < 0$. These results indicate that a larger l (r) implies a larger (smaller) insurance premium, inducing in turn a larger (smaller) prevention.

Lastly optimal saving s is affected by w_0, w_1, ρ and r. In particular we have $\frac{ds}{dw_0} > 0$, $\frac{ds}{dw_1} < 0$, $\frac{ds}{d\rho} < 0$ and $\frac{ds}{dr}$ ambiguous. In fact, considering equation (33), since $u'' < 0$, an increase in w_0 implies a decrease in the left-hand side of the equation. Since the right-hand side is not changed and since $\frac{de}{dw_0} = 0$, equation (33) is now satisfied only if saving is larger. Similarly, if w_1 increased then the right-hand side of (33) decreases. Since the left-hand side is not changed and since $\frac{de}{dw_1} = 0$, equation (33) is now satisfied if saving is smaller. Again, if ρ is larger the right-hand side of (33) is smaller, implying that, since the left-hand side is not changed and since $\frac{de}{d\rho} = 0$, s has to be smaller for equation (33) to be satisfied. Finally, with regard to the effect on s of a change in r, from condition (33) it follows that

$$\frac{ds}{dr} = \frac{-u''\left(w_0 - s - e - \frac{p(e)l}{1+r}\right)\frac{p(e)l}{(1+r)^2} + u''\Big(w_1 + s(1+r)\Big)s\frac{1+r}{1+\rho} + u'\Big(w_1 + s(1+r)\Big)\frac{1}{1+\rho}}{-u''\left(w_0 - s - e - \frac{p(e)l}{1+r}\right) - u''\Big(w_1 + s(1+r)\Big)\frac{(1+r)^2}{1+\rho}} \tag{34}$$

meaning that the sign of $\frac{ds}{dr}$ is ambiguous.

It is important to emphasise that the four derivatives computed ($\frac{ds}{dw_0}$, $\frac{ds}{dw_1}$, $\frac{ds}{d\rho}$ and $\frac{ds}{dr}$) describe effects which are the same of a simple two-period problem in certainty framework. The first two describe the effect of present and future wealth on smoothing, the third describes the effect of impatience on the saving level, while the last spells out the usual effect of the return from savings (described by equations (19),(20) and (21) in Section Three).[18]

As in the case studied by Dionne and Eeckhoudt (1984), when considering an unfair premium, i.e when $\mu > 1$, the full insurance condition no longer holds and the separation between the instruments disappears. In this case, all three instrument act together to face disutility due to uncertainty, to reduce insurance premium and to optimally allocate wealth between the two periods. For this reason, for $\mu > 1$, we find that the sign of the effects of parameter changes is ambiguous.

We emphasize that these last results are coherent with the findings of Dionne and Eeckhoudt, who obtain a clear direction for some effects only by imposing specific conditions in the case with saving and insurance (and no prevention). Similar conclusions are also obtained in Section Three in the case with saving and prevention (and no insurance). The results obtained in the presence of the three instruments together and for $\mu > 1$ are however much more complex and no simple condition ensuring clear indications on them can be derived. For this reason we choose to omit the findings for $\mu > 1$.

6 Conclusion

This work examines the optimal choice of savings and prevention in a two-period model with uncertain future wealth. Three main aspects were analysed.

First, with regard to the relationship between the optimal levels of the two instruments, we found that there is a kind of substitution between prevention and saving in equilibrium. In fact, comparing different equilibria, if they exist, we found that they are characterised by a decreasing relationship between saving and prevention (If saving is larger in one equilibrium than in another, then prevention is smaller). Furthermore, in the same context, we showed that a change in the interest rate (which is the return of saving) has, under usual conditions, an opposite effect on the two instruments, increasing saving and decreasing prevention.

Second, we study the effects on prevention and saving of changes in the endowment wealth w_0 and w_1 and in the loss l. We showed that, in general, all these effects are ambiguous since, as the two instruments are substitutes, we cannot determine the signs of the changes in their optimal levels without introducing specific assumptions. However, **unambiguous** results can be derived by introducing conditions on the relative efficiency of the two choice variables on intertemporal marginal utility. We showed that different combinations of these conditions allow to indicate the direction of all the effects analysed.

Third, we extended the separation result derived, given a fair insurance premium, by Dionne and Eeckhoudt (1984) in the case of two instruments (insurance and saving) to the case of three instru-

[18] Equation (34) incudes the term $-u''(I_0)\frac{p(e)l}{(1+r)^2}$, absent in (21), which is due to the effect of r on wealth in period 0.

ments (insurance, saving and prevention). We showed that, in this case, full insurance is used in order to remove uncertainty, prevention is used in order to reduce the insurance premium and saving is used for smoothing. Under the same assumptions we also provide some comparative statics results confirming this interpretation.

As a final consideration, we would like to remark that the analysis presented in this work has been conducted under the assumption, described in Section 2, that saving s and effort e are both always measurable in terms of wealth. We want to emphasize again that, as we said in Section 2, this assumption is typical in economics models studying prevention and **it** is introduced, to our knowledge, in all the literature in this field. However, given **these** premises, it is important to be aware that, while this assumption is always surely correct for saving (which is exactly a transfer of wealth from one period to another one), it is in some cases less obvious for effort. In our framework, indeed, effort can represent either a price to be paid [19] or some kind of physical or mental exertion.[20] While in the first case effort can surely be measured by a reduction in agent's wealth, it is clear that in the second case it is just a perception by the agent, so that the agent can in general only be able to put different levels of effort in an increasing ordering but not to exactly quantify them.[21]

This conclusion provides a clear bound to the applicability of the results in this work and in the economic literature on prevention, indicating that they can be surely applied just in the first of the two cases mentioned above. This also suggests a possible research line for future works.

Another **possible extension which to our knowledge has not been explored in this literature is to consider a broader class of utility functions, allowing for departures from the usual assumptions of smoothness of $u(.)$ and $p(.)$ and to take into account discontinuities and non differentiability.**

7 References

Briys, E., Schlesinger, H., 1990. Risk aversion and the propensities for self-insurance and self-protection. Southern Economic Journal 57, 458-467

Dionne, G., Eeckhoudt, L., 1984. Insurance and saving: some further results. Insurance: Mathematics and Economics 3, 101-110.

Dionne, G., Eeckhoudt, L., 1985. Self-insurance, self-protection and increased risk aversion. Economics Letters 17, 39-42.

[19] This is, for instance, the case of the purchase of a house allarm in example b) at page 2.

[20] This is the case of the decision to stop smoking in example c) at page 2.

[21] Using Stevens (1946) classification, the measurment scale for effort is a "ratio scale" in the first case while it is an "ordinal scale" in the second case.

Dionne, G. and Li J., The Impact of Prudence on Optimal Prevention Revisited. Cahier de recherche/ Working Paper 10-24 CIRPEE, Canada.

Eeckhoudt, L., Gollier, C., 2005. The impact of prudence on optimal prevention. Economic Theory 26, 989-994.

Eeckhoudt, L., Huang R. J., Tzeng L. Y., 2010. Precautionary effort: a new look. Working Paper, CORE, Belgium, and National Taiwan University, Taiwan.

Ehrlich, I., Becker, G. S., 1972. Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection. Journal of Political Economy 80, 623-48.

Kimball, M., S., 1990. Precautionary Savings in the Small and in the Large. Econometrica 58, 53-73.

Hall, R.E., 1988. Intertemporal substitution in consumption. Journal of Political Economy 96,. 339-357.

Leland, H., 1968. Saving and uncertainty: The precautionary demand for saving. Quarterly Journal of Economics 82, 465-473.

Menegatti, M., 2001. On the conditions for precautionary saving. Journal of Economic Theory 98, 189-193.

Menegatti, M., 2009. Optimal prevention and prudence in a two-period model. Mathematical Social Sciences 58, 393-397.

Moffet, D., 1975. Risk bearing and consumption theory. Astin bulletin 8, 342-358.

Moffet, D., 1977. Optimal deductible and consumption theory. Journal of Risk and Insurance 44, 669-683.

Jullien, B., Salani, B., Salani, F., 1999. Should more risk-averse agents exert more effort? Geneva Papers on Risk and Insurance Theory 24, 1928

Rothschild, M. &, Stiglitz J., 1971. Increasing risk II: Economic Consequences. Journal of Economic Theory 3, 66-84.

Sandmo, A., 1970. The effect of uncertainty on saving decisions. Review of Economic Studies 37, 353-360.

Stevens, S. S., 1946. On the Theory of Scales of Measurement. Science 103, 677-680

Abstract

Questo saggio presenta una funzione di produzione adatta a replicare gli effetti di un flusso migratorio in una data localita' sul salario reale. Un noto lavoro di Card (1989) mostra come i salari dei lavoratori cosiddetti "nativi" non rispondano negativamente a un influsso di immigrati con simili livello di educazione e esperienza. Per replicare questo risultato, si introduce una nuova funzione di produzione con due caratteristiche peculiari: complementarita' tra lavoro qualificato e capitale e adozione "factor-biased" di nuove tecniche. Il presente lavoro mostra come entrambi questi elementi siano necessari per replicare l'evidenza empirica. A supporto di questa ipotesi viene inoltre stimata la significativita' del legame tra immigrazione di lavoratori non qualificati e adozione di nuove tecniche.

Economia dell'immigrazione: complementarita' tra skills e capitale e scelte tecnologiche

FILIPPO REBESSI

Dipartimento di Economia,

Universita' degli Studi di Parma,

Parma, Italia

Novembre 2012

1 Introduzione

Puo' un influsso di immigrati lasciare invariato il salario pagato dalle imprese ai lavoratori gia' presenti in una certa area territoriale? La letteratura empirica esistente [si veda, ad esempio, la survey di Friedberg e Hunt (1995), che afferma: "the effect of immigration on the labor market outcomes of natives is small."] e' concorde nel rispondere positivamente a questa domanda. Il lavoro piu' influente in questo ambito e' senz'altro Card (1989); il paper analizza l'effetto della cosiddetta Mariel Boatlift, che ha contribuito ad aumentare del 7% l'offerta di lavoro di lavoratori non qualificati a Miami nel 1980. Lo studio conclude che il salario di questa categoria non ha subito variazioni consistenti quando confrontato con il salario di simili lavoratori in altre citta' comparabili a Miami ma non interessate dallo stesso influsso migratorio.

La risposta che si ottiene usando gli strumenti teorici dati dal modello di crescita cosiddetto neoclassico di Ramsey-Cass-Koopmans e' tuttavia di segno diverso. Si puo' infatti derivare facilmente la seguente espressione per il salario reale[1]:

$$w_t = (1-\alpha)\, l_t^{-\alpha} k_t^{\alpha}$$

Si noti come questo dipenda dal livello di capitale indicizzato al tempo t, scelto nel periodo $t-1$. Si supponga che l'economia sia in stato stazionario e sia aumentata esogenamente l'offerta di lavoro l_t: il salario reale w_t non puo' che diminuire, in virtu' dei rendimenti decrescenti del lavoro nella funzione di produzione e del fatto che il capitale e' fissato al livello di stato stazionario. Si noti infine che, in

[1] dettagli per la derivazione in Appendice

stato stazionario, il salario reale e' costante e pari a:

$$w_* = \left(\frac{1}{\beta\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (1-\alpha)$$

Le espressioni derivate suggeriscono che mentre nel lungo periodo il salario e' indipendente dalla quantita' di lavoro offerta, grazie agli aggiustamenti del capitale, nel breve periodo un aumento della stessa variabile comporta una diminuzione del salario. Conseguentemente un influsso di immigrati, che in questo modello corrisponde semplicemente a un aumento esogeno di l_t, produce una diminuzione del salario reale, contrariamente a quanto suggerisce l'evidenza empirica.

Per riconciliare questa divergenza, Ottaviano e Peri (2006) introducono imperfetta sostituibilita' tra lavoratori cosiddetti "nativi" e immigrati nella funzione di produzione. Nella loro formulazione, di fatto, e' il salario dei lavoratori precedententemente immigrati e gia' presenti nell'area interessata a diminuire, mentre quello dei "nativi" rimane stabile.

Questo paper, invece, introduce due differenti caratteristiche nella funzione di produzione: adozione "factor-biased" di nuove tecniche e complementarita' tra capitale e lavoratori qualificati.

In questo contesto, l'impresa in grado non solo scegliere combinazioni di capitale e lavoro per produrre, ma anche l'intensita' con cui questi fattori sono impiegati [si veda Caselli-Coleman (2006)]. L'adozione di nuove tecniche si definisce "factor-biased" quando l'abbondanza di un fattore induce limpresa ad impiegarlo piu' intensivamente. In riguardo all'analisi dell'ingresso di immigrati non qualificati, ad affiancare l'effetto negativo sul salario dovuto ai rendimenti marginali decrescenti, vi sara' dunque anche un effetto positivo associato all'aumentata intensita' con cui questo fattore di produzione sara' ottimalmente utilizzato.

La seconda caratteristica riguarda il grado di sostituibilita' tra capitale e lavoro impiegato dall'impresa; si assume che il lavoro qualificato sia complementare al capitale, mentre il lavoro non qualificato sia un sostituto del capitale, come ad esempio in Krussel e al. (2000). In letteratura, questa assunzione e' utilizzata per spiegare l'andamento crescente del premio salariale del lavoro qualificato rispetto a quello non qualificato: dagli anni '70 ad oggi il prezzo relativo di beni di investimento durevoli e' significativamente diminuto [si veda Greenwood e al. (1997) ad esempio], incentivando le imprese ad aumentare lo stock di questi beni capitali che sono complementari al lavoro qualificato e sostituti di quello non qualificato.

Il contributo principale di questo saggio e' di mostrare come l'interazione di queste due caratteristiche produca effetti quantitativi sul salario compatibili con quanto riscontrato nella letteratura, oltre a portare evidenza empirica di adozione "factor-biased" di nuove tecniche in seguito a episodi di immigrazione. L'intuizione di base e' che l'immigrazione di lavoratori non qualificati contribuisca

a rallentare la sostituzione di questo fattore con il capitale e che allo stesso tempo, rendendo questo fattore produttivo piu' abbondante, fornisca un incentivo a utilizzarlo relativamente in modo piu' intensivo. Cio' contribuisce ad aumentarne la domanda da parte delle imprese e, di conseguenza, la relativa remunerazione. La combinazione di questi due effetti contrasta l'effetto negativo sul salario dovuto ai rendimenti decrescenti del fattore lavoro non qualificato nella funzione di produzione.
Nella prossima sezione, "Analisi Empirica", viene descritto il database e le tecniche utilizzate per documentare i sopra citati cambiamenti a livello di scelte tecnologiche conseguenti un influsso di immigrati non qualificati. Nella sezione "Analisi Quantitativa" viene analizzato in dettaglio il modello qui introdotto ed e' simulato l'effetto sul salario di un influsso di immigrati non qualificati. L'ultima sezione del paper conclude.

2 Analisi Empirica

2.1 Background Teorico

Per poter stimare la significativita' del legame tra l'adozione di nuove tecniche e immigrazione, occorre in primis specificare un modello che sia utile a questo scopo. La formulazione piu' semplice presente in letteratura, che viene qui adottata, e' dovuta a Katz e Murphy (1990) e impiega la seguente funzione di produzione:

$$Y_{i,t} = K_{i,t}^{1-\alpha}\left[(a_{i,t}S_{i,t})^{\sigma} + ((1-a_{i,t})U_{i,t})^{\sigma}\right]^{\frac{\alpha}{1-\sigma}}$$

dove i indica una specifica area metropolitana (MSA) e t e' un indicatore temporale; S e' l'offerta di lavoro qualificato, U e' l'offerta di lavoro non qualificato, K e' il livello di capitale impiegato. a, infine, e' l'intensita' con cui i due diversi tipi di lavoro sono impiegati nella produzione. Si noti che per ogni valore di σ strettamente minore di 1, lavoro qualificato e non qualificato sono sostituti imperfetti. Si noti inoltre che $\forall\alpha \in (0,1)$ la funzione di produzione in esame di fatto una Cobb Douglass in capitale e lavoro, con il fattore lavoro composto da un aggregatore di lavoro qualificato e non qualificato.
Dalle condizioni necessarie e sufficienti per le scelte ottimali di U e S e con alcuni semplici passaggi algebrici e' possibile ottenere la seguente equazione

$$\log\frac{w_{i,S,t}}{w_{i,U,t}} = (\sigma-1)\log\frac{S_{it}}{U_{it}} + \sigma\log\frac{a_{it}}{1-a_{it}} \tag{1}$$

dove $w_{i,S,t}$ e $w_{i,U,t}$ sono rispettivamente la remunerazione del lavoro qualificato e non qualificato in una MSA "i" nel periodo "t". Il rapporto $\frac{a_{it}}{1-a_{it}}$ puo' essere interpretato come il grado di avanzamento tecnico dell'MSA "i" nel periodo "t", essendo di fatto il rapporto tra l'intensita' di uso del lavoro qualificato e non qualificato. In altre parole, dove e quando questo rapporto risulta piu' elevato vengono adottate tecniche che impiegano il lavoro qualificato relativamente piu' intensivamente.

2.2 Database

Il database utilzzato e' tratto da Ipums[2] ed include dati su tutte le aree statistiche metropolitane degli Stati Uniti. I dati coprono il periodo 1994-2012 e riguardano salari orari per lavoratori qualificati e non qualificati, partecipanti attivi nella forza lavoro, di eta' compresa tra 17 e 65 anni. Un lavoratore e' identificato come qualificato in base al livello di educazione conseguito: lavoratori con almeno un anno di college sono considerati qualificati; lavoratori che hanno al massimo conseguito il titolo di scuola media superiore sono non qualificati.

2.3 Stime empiriche

Si noti come, partendo da (1), sia possibile stimare il coefficiente di sostitutibilita' tra lavoro qualificato e non qualificato σ tramite la seguente regressione lineare:

$$\log \frac{w_{i,S,t}}{w_{i,U,t}} = a + (\sigma - 1) \log \frac{S_{it}}{U_{it}} + \epsilon \tag{2}$$

Differenze non osservabili tra citta' sono state eliminate impiegando "fixed effects", analogamente a quanto fatto da Katz e Murphy (1990). I risultati sono riportati nella seguente tabella:

σ	Standard Error	T Stat	P-Value
0.429	.3037316	-1.88	0.070

Tale stima corrisponde a un coefficiente di sostituibilita' tra lavoro qualificato e non qualificato pari a 1.75, in linea con le stime presenti in letteratura, che variano nell'intervallo (1,2) [si veda Caselli (2006)]. Seguendo quanto indicato da Violante (2008), ora possibile utilizzare (1) al fine di calcolare il rapporto $\frac{a_{it}}{1-a_{it}}$ per ogni anno ed MSA.

Il primo test effettuato sulla relazione tra immigrazione di lavoratori non qualificati e adozione "factor-biased" di nuove tecniche il seguente. Sia UI_{it} la frazione di lavoratori immigrati non qualificati in una MSA "i" nel periodo "t"; si definiscano le quantita' $\Delta_{ait} = \frac{a_{it+1}}{1-a_{it+1}} - \frac{a_{it}}{1-a_{it}}$ e $\Delta_{Uit} = UI_{it+1} - UI_{it}$. Queste ultime sono semplicemente le variazioni annuali in una data MSA rispettivamente di quello che e' stato precedentemente definito come il grado di avanzamento tecnico e della frazione di lavoratori immigrati non qualificati. E' ora possibile effettuare la seguente regressione lineare:

$$\Delta_{ait} = a + \beta \Delta_{Uit} + \epsilon \tag{3}$$

[2]www.ipums.org/usa

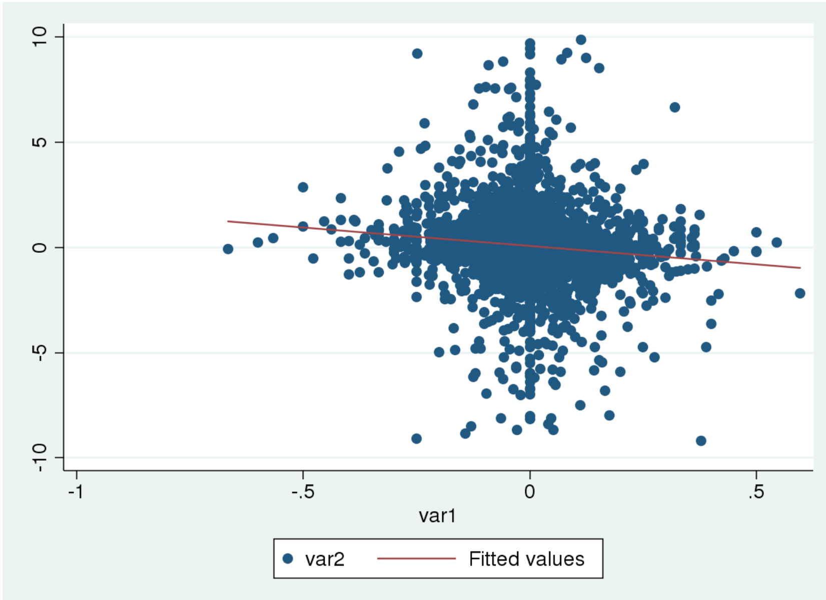


Figure 1: Scatter Plot e Linea di Tendenza, Regressione (3)

Per mostrare che la teoria di adozione "factor-biased" di nuove tecniche sia plausibile, necessario che il segno del coefficiente β stimato sia negativo: quando la misura relativa di lavoratori immigrati non qualificati nella forza lavoro cresce, le imprese cambiano i loro piani di produzione e scelgono una tecnologia che impiega meno intensivamente il lavoro qualificato; in altre parole, Δ_{ait} ha segno negativo. I risultati della regressione sono riportati nella seguente tabella:

β	Standard Error	T Stat	P-Value
-1.765192	.2449459	-7.21	0.000

La stima e' soddisfacente e indicativa del legame prospettato, ma non conclusiva. Se da un lato e' vero che episodi di crescita della quantita' di immigrati non qualificati sono associati a riduzioni del grado di avanzamento tecnico, tuttavia questa regressione non e' necessariamente indicativa di un rapporto di causalita' tra le due variabili. Ad esempio, e' possibile che questo tipo di immigrati tenda a recarsi presso localita' in cui i programmi di welfare offerti siano piu' generosi. Se variazioni di spesa in questi programmi sono correlate negativamente con variazioni del grado di avanzamento tecnico, la correlazione individuata e' spuria.

Un'altra possibilita' di segno opposto e' che alcune variabili esplicative rilevanti siano omesse; e' naturale pensare ad esempio che gli immigrati non qualificati vadano verso quelle aree metropolitane in cui il rapporto tra lavoratori qualificati e non qualificati e' alto. Essendo relativamente scarsi in queste localita', la loro remunerazione relativa sara' in media elevata. L'omissione di queste variabili comporterebbe una sottostima (in valore "assoluto") della relazione tra Δ_{ait} e Δ_{Uit}.

Al fine di indirizzare questi problemi, viene stimata la seguente regressione:

$$\Delta_{ait} = a + \beta_1 \Delta_{Uit} + \beta_2 \Delta_{Uit+1} + \beta_3 \Delta_{Uit-1} + \epsilon$$

Al fine di confermare la direzione di causalita' ipotizzata, e' necessario che β_3 sia minore di 0: immigrati non qualificati arrivano nel periodo $t-1$ in localita' "i" e le imprese reagiscono al tempo successivo (t) diminuendo a_{it}. Δ_{Uit+1} e' incluso tra i regressori per verificare l'esistenza di una relazione di segno opposto: le imprese scelgono di diminuire a_{it} e gli immigrati non qualificati affluiscono presso la localita'. Le stime sono riportate nella seguente tabella:

$Coefficiente$	Valore	Standard Error	T-Stat
β_1	-1.852681	.2649758	-6.99
β_2	-.1844861	.2649758	-0.69
β_3	-.0269022	.01549	-1.74
a	.0511923	0.025395	2.02

Si noti che i coefficienti hanno il segno e il livello di significativita' desiderati: β_2 non e' statisticamente diverso da 0, mentre β_3 ha segno negativo ed significativamente diverso da 0 ($P.Value < 0.1$). Questo risultato conclude l'analisi empirica: si e' mostrato come esista una relazione negativa tra influsso di immigrati non qualificati e adozione di tecniche che impiegano il lavoro non qualificato piu' intensivamente. L'analisi sembra evidenziare che siano le imprese a reagire alla mutata dotazione di fattori in una specifica localita' e non viceversa. Vi e' quindi supporto empirico per l'introduzione di una funzione di produzione con scelte tecniche endogene e "factor-biased".

3 Analisi Quantitativa

3.1 Adozione "factor biased" di nuove tecniche

Il primo obiettivo di questa sezione del saggio e' di mostrare come una funzione di produzione che includa unicamente la adozione "factor-biased" di nuove tecniche sia inadatta a riprodurre alcune regolarita' empiriche, in particolare a livello di premio salariale. In primo luogo, si introduce formalmente il problema dell'impresa:

$$\max_{\{a_s,a_u,K,S,U\}} K^\alpha \left[(a_s S)^\sigma + (a_u U)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha}{\sigma}} - r^* K - w_u U - w_s S \tag{4}$$

$$a_s^\rho + \gamma a_u^\rho \leq B$$

L'impresa dunque sceglie l'allocazione dei fattori produttivi: Capitale (K), lavoro qualificato (S) e lavoro non qualificato (U), insieme all'intensita' di impiego del lavoro qualificato e non qualificato (rispettivamente a_s e a_u), soggetta a un vincolo tecnologico. Questa impostazione rispecchia quella di Caselli-Coleman (2006).

L'elemento peculiare e' la scelta di a_s e a_u; normalmente questi sono semplicemente due parametri esogeni. Il vincolo descrive una frontiera tecnologica: tutte le combinazioni di a_s e a_u fattibili data l'avanzamento tecnologico attuale, descritto dai parametri γ e B. La natura "factor-biased" della scelta e' apprezzabile in equilibrio; l'intuizione e' che piu' un fattore e' abbondante, meno elevato e' il suo prezzo in equilibrio e dunque piu' conveniente e' impiegaro in modo intensivo.

Si assume infine di essere in una piccola economia aperta, in cui l'impresa affitta il capitale dall'esterno e in cui il rispettivo costo e' fissato pari a r^*. Questa ipotesi e' chiaramente una forte semplificazione; tuttavia questa analisi si concentra sul prezzo del fattore lavoro ed e' mirata a una unita' geografica (area metropolitana) in realta' non troppo dissimile da una piccola economia aperta.

Il consumatore invece solve il seguente problema:

$$\max_{\{c_i\}} \sum_t \beta^t u(c_{it}) \tag{5}$$

$$c_{it} \leq w_{it} I_t$$

$$i \in \{U, S\}, \forall t$$

Un equilibrio in questo contesto e' un'allocazione per il consumatore $\hat{c} = \{c_t\}_{\forall t}$, un'allocazione per l'impresa $\hat{f} = \{a_{st}, a_{ut}, K_t, S_t, U_t\}_{\forall t}$ e un sistema di prezzi $\hat{p} = \{\{w_{it}\}_{i \in (U,S)}, r^*\}_{\forall t}$, tali che $\hat{c}$ solve il problema del consumatore, $\hat{f}$ solve il problema dell'impresa e la domanda in eccesso sul mercato dei beni e' uguale a 0, il che e' equivalente alla condizione $K^\alpha \left[(a_s S)^\sigma + (a_u U)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha}{\sigma}} = r^* K + c, \forall t$

L'equilibrio nel periodo t e' caratterizzato dal seguente sistema di 6 equazioni in 6 incognite:

$$\frac{a_s}{a_u} = \left(\frac{S}{U}\right)^{\sigma/(\rho-\sigma)}$$

$$w_u = (1-\alpha) K^\alpha \left[(a_s S)^\sigma + (uU)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha-\sigma}{\sigma}} a_u^\sigma U^{\sigma-1}$$

$$w_s = (1-\alpha) K^\alpha \left[(a_s S)^\sigma + (a_u U)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha-\sigma}{\sigma}} a_s^\sigma S^{\sigma-1}$$

$$a_s^\rho + \gamma a_u^\rho \leq B$$

$$K^\alpha \left[(a_s S)^\sigma + (a_u U)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha}{\sigma}} = r^* K + c$$

$$\alpha K^{\alpha-1} \left[(a_s S)^\sigma + (a_u U)^\sigma\right]^{\frac{1-\alpha}{\sigma}} = r^*$$

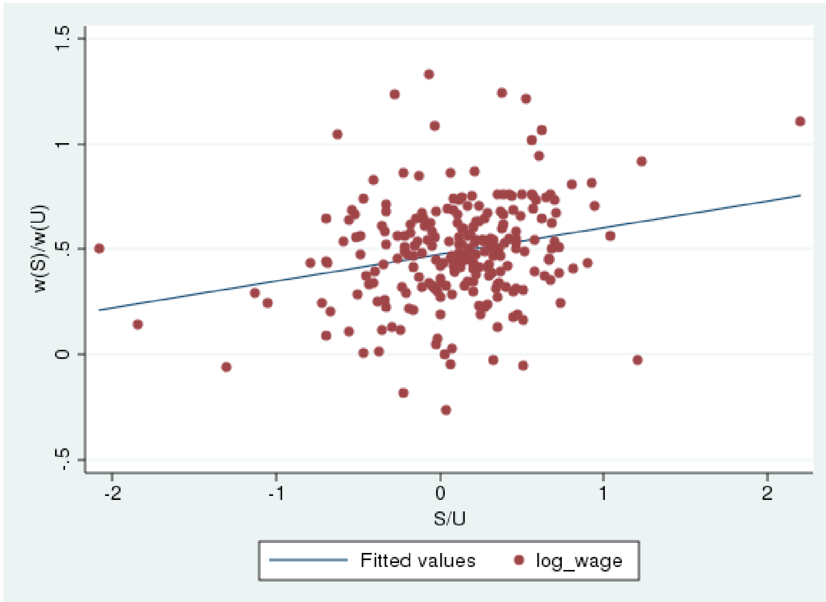


Figure 2: Premio Salariale e disponilibilita' di fattori, aree metropolitane degli Stati Uniti, Anno 2008

Si noti come $\{a_i\}_{i \in (U,S)}$ contribuisca, ceteris paribus, ad aumentare il salario: piu' intensivamente un fattore viene utiizzato, piu' alta e' la domanda per questo fattore e di conseguenza piu' alta sara' la relativa remunerazione in equilibrio.

Dopo semplici passaggi algebrici e' possibile tuttavia ottenere la seguente espressione per il premio salariale, definito dal rapporto $\frac{w_s}{w_u}$:

$$\frac{w_s}{w_u} = \kappa \left(\frac{S}{U}\right)^{\theta}, \quad \theta < 0, \quad \kappa > 0$$

Il premio salariale definito dall'equilibrio di questo modello e' dunque decrescente in $\frac{S}{U}$. E' tuttavia un fatto noto che, negli Stati Uniti, nel periodo 1965-1995 il premio salariale sia cresciuto da 1.45 a 1.7, mentre nello stesso periodo temporale il rapporto tra lavoratori qualificati (con educazione a livello universitario) e non qualificati e' triplicato: l'opposto della relazione descritta dalla precedente equazione [si veda ad esempio Violante (2008)]. Inoltre, l'evidenza empirica a livello di aree metropolitane negli Stati Uniti e' dello stesso segno. Di conseguenza, questo modello ha un'implicazione che e' contraddetta dall'evidenza empirica ed e' necessario modificarlo per renderlo consistente con quest'ultima.

3.2 Complementarita' tra Skills e Capitale

Si supponga ora che la funzione di produzione sia la seguente:

$$F\left(K,S,U,a_s,a_u;\omega,a_k\right)=\left\{(a_sS)^{\sigma}+\left[(a_uU)^{\rho}+(a_kK)^{\rho}\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$a_s^{\nu}+\gamma a_u^{\nu}+\theta a_k^{\nu}\leq B$$

La scelta endogena dell'intensita' di impiego dei fattori e' ancora presente; tuttavia si noti come ora lavoro non qualificato U e capitale K siano parte di un aggregatore. I due fattori sono sostituti perfetti quando $\rho=1$. La complementarita' tra lavoro qualificato e capitale e' dovuta alla seguente relazione: se $\rho>\sigma$, allora capitale e lavoro non qualificato sono sostituti migliori di capitale e lavoro qualificato. In altre parole, lavoro qualificato e capitale sono complementari. Questa formulazione rispecchia quella di Lewis (2010) (che tuttavia non include la scelta endogena di intensita' dei fattori). Prima di mostrare quantitativamente che questa configurazione e' adatta a replicare l'evidenza empirica riportata nella letteratura ed e' anche consistente con i dati relativi al premio salariale, si noti che questa non e' l'unica formulazione che esibisca complementarita' tra capitale e lavoro qualificato. Si consideri ad esempio la seguente funzione di produzione, introdotta da Krussel et al. (2000):

$$F=K_f^{\alpha}\left\{\lambda\left[\mu\left(K_e\right)^{\rho}+(1-\mu)S^{\rho}\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}+(1-\lambda)U^{\sigma}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\sigma}}$$

Questa funzione introduce la nozione di capitale fisso e capitale di equipaggiamento; il capitale di equipaggiamento K_e e' complementare al lavoro qualificato S. La distinzione tra i due tipi di capitale e' utile a conservare le caratteristiche standard di una funzione di produzione Cobb-Douglass e in praticolare per ottenere una quota capitale e quota lavoro costanti.

Potenzialmente questa funzione, una volta introdotta la scelta di intensita' di utilizzo dei fattori da parte dell'impresa, potrebbe essere soddisfacente per lo scopo di questo paper. Il costo, tuttavia, sarebbe in termini di maggiore complessita' analitica.

Dato che lo scopo del paper e' riprodurre alcune regolarita' empiriche concernenti il salario di equilibrio, la scelta e' ricaduta sulla prima formulazione qui riportata, in quanto il dettaglio sulla differenza tra capitale fisso e capitale di equipaggiamento non e' cruciale in un contesto di piccola economia aperta. Formalmente, il problema dell'impresa e' dunque il seguente:

$$\max_{K,S,U,\omega}F\left(K,S,U;\omega\right)-r^{*}K-Sw_s-Uw_u$$

$$\text{s.t.}$$

$$\omega\in\Omega(\nu,\gamma,\theta,B)$$

dove

$$F\left(K,S,U;\omega\right)=\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}$$
$$\Omega(\nu,\gamma,B)\equiv\left\{(a_s,a_u,a_k)\in R^3_+ \mid a_s^\nu+\gamma a_u^\nu+\theta a_k^\nu\le B\right\}$$

Il problema del consumatore e' invariato rispetto al caso senza complementarita' tra lavoro qualificato e capitale.

Un equilibrio in questo contesto e' un'allocazione per il consumatore $\hat{c}=\{c_t\}_{\forall t}$, un'allocazione per l'impresa $\hat{\hat{f}}=\{a_{st},a_{ut},K_t,S_t,U_t\}_{\forall t}$ e un sistema di prezzi $\hat{p}=\{\{w_{it}\}_{i\in(U,S)},r^*\}_{\forall t}$, tali che $\hat{c}$ solve il problema del consumatore, $\hat{\hat{f}}$ solve il problema dell'impresa e la domanda in eccesso sul mercato dei beni e' uguale a 0, il che e' equivalente alla seguente condizione $\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}=r^*K+c,\forall t$

La prossima proposizione garantisce l'esistenza e unicita' dell'equilibrio:

Proposition

Un equilibrio interno esiste ad e' unico se e solo se le seguenti restrizioni parametriche sono effettive

1. $\frac{\sigma}{1-\sigma}<\nu$
2. $\frac{\rho}{1-\rho}<\nu$

L'equilibrio al tempo t puo' essere caratterizzato dal seguente sistema di 6 equazioni e 6 incognite:

$$\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}a_s^\sigma S^{\sigma-1}=w_s$$

$$\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}}a_u^\rho U^{\rho-1}=w_u$$

$$\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}}a_k^\rho K^{\rho-1}=r^*$$

$$\left\{(a_sS)^\sigma+\left[(a_uU)^\rho+(a_kK)^\rho\right]^{\frac{\sigma}{\rho}}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}=r^*K+c$$

$$a_s^{\sigma-\nu}a_u^{\nu-\rho}\frac{S^\sigma}{U^\rho}=\frac{1}{\gamma}$$

$$a_s^\nu+\gamma a_u^\nu+\theta a_k^\nu\le B$$

Prova: in Appendice.

L'intuizione per questo risultato puo' essere data al limite per σ e ρ tendenti a 1. Questo e' il caso di perfetta sostitibilita' tra fattori, in cui e' noto che la soluzione non sara' interna; il lato sinistro della disuguaglianza tende a infinito e, dato che ν finito, la condizione non puo' essere verificata.

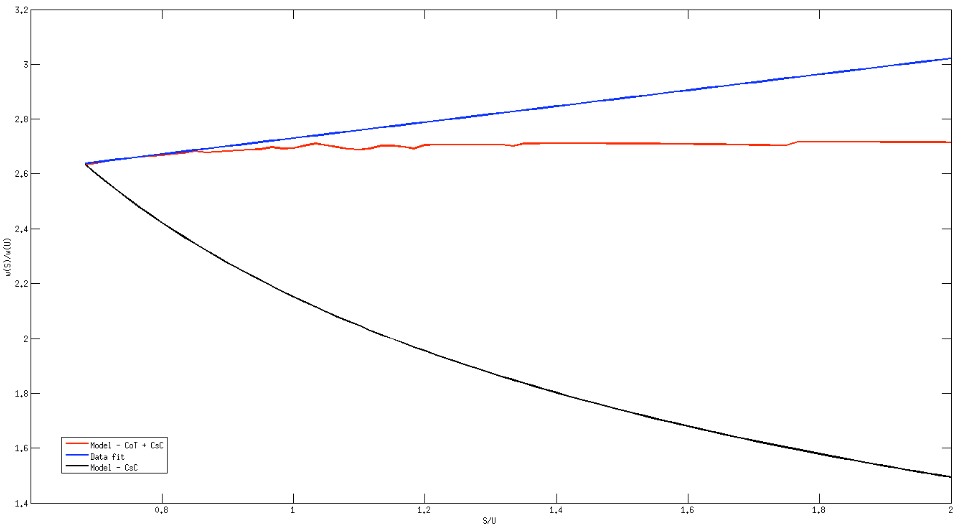
Nel resto del saggio questo sistema viene risolto quantitativamente e utilizzato in due esercizi. Si noti tuttavia che e' possibile dare una espressione analitica per il premio salariale, che permette di avere qualche intuizione preliminare sui risultati.

$$\frac{w_s}{w_u} = \gamma^{\frac{\sigma}{\rho}} \underbrace{\left[1 + \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^{\frac{\rho}{\rho-\nu}} \left(\frac{U}{K}\right)^{\frac{\nu}{\rho-\nu}}\right]^{\frac{\nu(\sigma-\rho)}{\rho(\sigma-\nu)}}}_{Effetto\ 1} \underbrace{\left(\frac{S}{U}\right)^{\frac{\sigma\nu-(\nu-\sigma)}{\nu-\sigma}}}_{Effetto\ 2}$$

L'effetto 1 e' dato dalla combinazione di complementarita' tra lavoro qualificato e capitale e adozione "factor-biased" di nuove tecniche; il contributo e' incrementale in K e decresce in U e puo' essere spiegato intuitivamente come segue. Mentre la quantita' di capitale cresce, cresce anche la domanda, e quindi la remunerazione, del lavoro qualificato; l'effetto negativo del lavoro non qualificato e' invece dovuto al fatto che, a mano a mano che quest'ultimo diventa piu' abbondante, parte dell'intensita' d'uso destinata al lavoro qualificato sara' trasferita su quello non qualificato.
L'effetto 2 e' invece chiaramente il risultato dei rendimenti marginali dei fattori produttivi nella funzione di produzione. E' dunque chiaro che per configurazioni parametriche in cui l'effetto 1 prevale sull'effetto 2 la presente formulazione puo' riprodurre con successo i risultati desiderati.

3.3 Esercizio Quantitativo - 1

Il primo esercizio quantitativo e' di riprodurre la Figura 2 di pagina 9 del presente lavoro. Il grafico rappresenta la relazione tra il logaritmo del rapporto tra lavoro qualificato e non qualificato, sull'asse delle ascisse, e il premio salariale, sull'asse delle ordinate. La relazione e' relativa all'anno 2008, ma e' stabile in ogni anno considerato nel campione 1994-2008. La linea blu nel grafico e' una retta di regressione, ed esibisce pendenza positiva: al crescere del rapporto S/U, il premio salariale e' crescente.
Il grafico puo' essere riprodotto solvendo il sistema di equazioni caratterizzante l'equilibrio e fornendo gli stessi valori del rapporto tra lavoro qualificato e non qualificato della figura. In prima istanza, si e' deciso di neutralizzare l'effetto delle scelte "factor-biased", al fine di isolare l'effetto della complementarita' tra lavoro qualificato e capitale.
Infine lo stesso esercizio e' stato effettuato includendo la scelta tecnologica. I risultati sono riportati nel seguente grafico

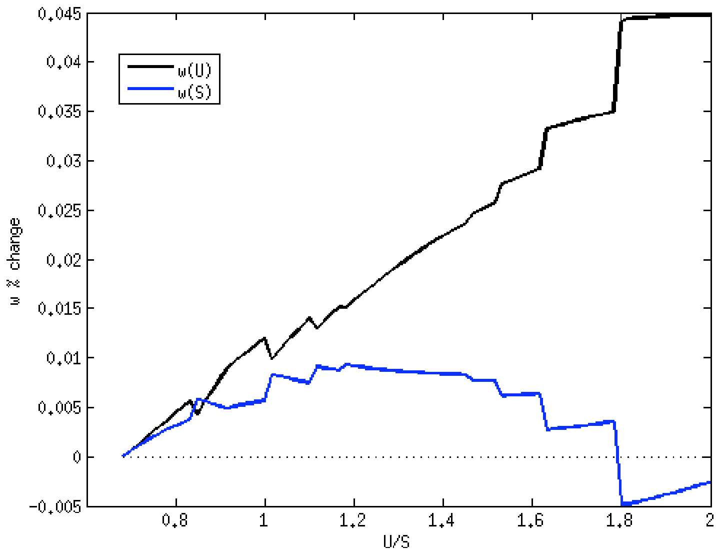


La linea blu e', nuovamente, la retta di regressione relativa alla Figura 2. Si noti come la linea nera, relativa alla simulazione che include unicamente la complementarita' tra lavoro qualificato e capitale, e' strettamente decrescente. Dato un tasso di interesse, che rappresenta il costo del capitale, questa versione del modello non e' in grado di riprodurre il pattern qualitativo empirico. Al fine di riprodurre lo stesso andamento sarebbe dunque necessario ridurre progressivamente il costo del capitale, il che e' in linea con l'idea sviluppata in Krussel e al. (2000).

La linea rossa, invece, e' relativa al modello completo. Si noti come l'andamento sia ora crescente. Il risultato e' importante, in quanto mostra che entrambi questi elementi siano necessari per ottenere l'andamento desiderato.

3.4 Esercizio Quantitativo - 2

Il secondo esercizio e' invece diretto a testare la capacita' del modello considerato ad ottenere il risultato empirico descritto in Card (1989). L'obiettivo e' di ottenere, all'aumentare della proporzione di lavoratori non qualificati (l'equivalente di un influsso di immigrati non qualificati), un salario non decrescente per il lavoro non qualificato. I risultati sono sintetizzati nel seguente grafico:



Il grafico rappresenta il cambio in percentuale rispetto alla situazione originale, in cui i lavoratori non qualificati sono il 75% della misura di lavoratori qualificati nell'economia. Mentre questa percentuale aumenta (fino a raggiungere il 200%), si noti che il salario e' fondamentalmente piatto: il massimo incremento percentuale raggiunto e' del 4.5%

Si noti che il risultato e' anche compatibile con l'evidenza di influsso di lavoratori "nativi" non qualificati in seguito a un influsso di immigrati non qualificati, come riportato per esempio da Card (2001).

4 Conclusione

Il presente saggio usa un modello di equilibrio economico generale per replicare alcune regolarita' empiriche analizzate dalla letteratura dell'economia dell'immigrazione. Una delle caratteristiche salienti, e sorprendenti, associate ad un ingresso in un mercato del lavoro locale di una rilevante quantita' di immigrati non qualificati e' che la rispettiva remunerazione in termini di salario non subisce una diminuzione rilevante.

Il lavoro e' focalizzato sulle reazioni ottimali dell'impresa a mutazioni nella dotazione di fattori produttivi disponibili. Il modello, in particolare, si serve di due elementi impiegati in altre aree della letteratura economica: adozione "factor-biased" di nuove tecniche e complementarita' tra lavoro qualificato e capitale. Il lavoro mostra come entrambe queste caratteristiche siano necessarie per generare dati con pattern analoghi a quelli riscontrati nei dati. Quando queste sono considerate separatamente, infatti, il modello fallisce nell'intento di riprodurre quanto desiderato.

I dati generati dall'equilibrio di questo modello non solo sono coerenti con la stabilita' del salario dei lavoratori non qualificati, ma anche con l'andamento empirico del premio salariale, vale a dire il rapporto tra il salario dei lavoratori qualificati e quello dei lavoratori non qualificati.

Se da un lato la complementarita' tra lavoro qualificato e capitale e' un elemento gia' considerato in letteratura per spiegare l'andamento del premio salariale nel tempo negli Stati Uniti, l'adozione "factor-biased" di nuove tecniche e' invece un elemento innovativo nell'ambito della letteratura dell'economia dell'immigrazione. Il saggio presenta evidenza dell'esistenza di un legame tra adozione di tecnologie che usano il lavoro non qualificato in modo intensivo e episodi di immigrazione di lavoratori non qualificati, coerentemente con l'ipotesi di scelte tecnologiche "factor biased". Vengono inoltre effettuati test per accertare che la direzione della causalita' di questa relazione sia quella auspicata.

Possibili estensioni immediate del lavoro riguardano lo studio di una economia chiusa, in cui il tasso di interesse sia endogeno; e' possibile inoltre usare questo framework teorico per porre domande normative, per valutare in termini di "welfare" politiche concernenti l'immigrazione.

5 Bibliografia

Card, D., 1989. The impact of the Mariel boatlift on the Miami labor market. Industrial and Labor Relations Review 43, 245-257

Friedberg, RM., Hunt, J., 1995, The Impact of Immigrants on Host Country Wages, Employment and Growth. The Journal of Economic Perspectives 9, 23-44

Ottaviano, G.I.P., Peri, G., 2006. Rethinking the effects of immigration on wages. NBER WP

Caselli, F., Coleman, W.J., 2006, The World Technology Frontier. The American Economic Review 96, 499-522

Krusell, P., Ohanian, L.E., Rios-Rull, J.V., Violante, G.L., 2000, Capital-skill Complementarity and Inequality: A Macroeconomic Analysis. Econometrica 68, 10291053

Greenwood, J., Hercowitz, Z., Krusell, P., 1997, Long-Run Implications of Investment-Specific Technological Change. The American Economic Review 87, 342-362

Katz, L.F., Murphy, K.M., 1990, Changes in relative wages, 19631987: supply and demand factors, The Quarterly Journal of Economics 107, 35-78

Violante, G.L., 2008, Skill-Biased Technical Change, The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd Edition

6 Appendice

6.1 Derivazione del salario

Nel modello di crescita neoclassico, il salario in equilibrio e' semplicemente dato dal rendimento marginale del fattore lavoro. L'impresa solve il seguente problema:

$$\max_{K_t, l_t} K_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} - r_t K_t - w_t l_t$$

Dalle condizioni del prim'ordine, derivando rispetto a l_t si ottiene

$$w_t = K_t^{\alpha} l_t^{-\alpha}$$

In stato stazionario il livello di capitale si ottiene tramite la euler equation:

$$\frac{u(c_t)}{\beta u(c_{t+1})} = \alpha K_t^{\alpha-1} l^{1-\alpha} + 1 - \delta$$

Assumendo per semplicita' $\delta = 1$ si ottiene

$$K_* = \left(\frac{1}{\beta\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} l_*$$

Sostituendo infine nell'espressione per il salario di equilibrio si ottiene

$$w_* = \left(\frac{1}{\beta\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (1-\alpha)$$

6.2 Prova di esistenza dell'equilibrio

Si consideri in primis il problema di una impresa con una tecnologia fissa (A_s, A_u, A_k) e prezzi w_u, w_s, r. Per ogni livello di produzione y, una impresa che massimizzi i profitti sceglie L_s, L_u, K per risolvere il seguente:

$$\min_{L_s, L_u, K} w_s L_s + w_u L_u + rK - \lambda \left[\left\{ (A_s L_s)^{\sigma} + \left[(A_u L_u)^{\rho} + (A_k K)^{\rho} \right]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} - y \right]$$

Le condizioni del prim'ordine sono:

(1) $w_s = \lambda \left\{ (A_s L_s)^{\sigma} + \left[(A_u L_u)^{\rho} + (A_k K)^{\rho} \right]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} A_s^{\sigma} L_s^{\sigma-1}$

(2) $w_u = \lambda \left\{ (A_s L_s)^{\sigma} + \left[(A_u L_u)^{\rho} + (A_k K)^{\rho} \right]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left[(A_u L_u)^{\rho} + (A_k K)^{\rho} \right]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}} A_u^{\rho} L_u^{\rho-1}$

(3) $r = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}} A_k^\rho K^{\rho-1}$

(4) $y = \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}}$

Riorganizzando (2) e (3), si ottiene:

$$L_u w_u + rK = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho)]$$

che e' equivalente a

$$L_u w_u + rK = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}}$$

moltiplicando entrambi i membri per L_s si ottiene :

$$L_s w_s = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} (A_s L_s)^\sigma$$

e infine, usando (4),

$$L_s w_s + L_u w_u + rK = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}} = \lambda y$$

Si solve ora per λ

$$\left(\frac{w_u}{A_u}\right) = \lambda \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}\frac{\rho}{\rho-1}} (A_u L_u)^{\rho-1}$$

$$\left(\frac{w_u}{A_u}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} = \lambda^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\rho}{\rho-1}} (A_u L_u)^\rho$$

$$\left[\left(\frac{w_u}{A_u}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \left(\frac{r}{A_k}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right] = \lambda^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{\frac{\rho(1-\sigma)}{\sigma(\rho-1)}} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma-\rho}{\rho}\frac{\rho}{\rho-1}+1}$$

$$\left[\left(\frac{w_u}{A_u}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \left(\frac{r}{A_k}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \lambda^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left\{ (A_s L_s)^\sigma + [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}} \right\}^{-1} [(A_u L_u)^\rho + (A_k K)^\rho]^{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{w_u}{A_u}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \left(\frac{r}{A_k}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \left(\frac{w_s}{A_s}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \lambda$$

Infine si puo' sostituire l'espressione per λ nell'espressione per il costo

$$L_s w_s + L_u w_u + rK = \left\{ \left[\left(\frac{w_u}{A_u}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \left(\frac{r}{A_k}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \left(\frac{w_s}{A_s}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \cdot y$$

Si consideri ora la funzione di costo appena derivata. Si noti che e' lineare nel livello di output. Dunque il problema di massimizzazione del profitto tramite scelta tecnologica coincide con il problema minimizzazione del costo. Si definisca, per semplificare la notazione, la quantita'
$D_j = A_j^{\nu}$ for $j = u, s, k$, $\xi_1 = \frac{\rho}{\nu(1-\rho)}$, $\xi_2 = \frac{\sigma}{\nu(1-\sigma)}$, $\xi_3 = \frac{\rho-1}{\rho}\frac{\sigma}{\sigma-1}$. Si noti inoltre $\xi_1 \cdot \xi_3 = \xi_2$.:

$$\min_{D_s, D_u, D_k} \left\{ \left[w_u^{\frac{\rho}{\rho-1}} D_u^{\xi_1} + r^{\frac{\rho}{\rho-1}} D_k^{\xi_1} \right]^{\xi_3} + w_s^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} D_s^{\xi_2} \right\}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

s.t.

$$D_s + \gamma D_u + \theta D_k = B$$

Sotto l'assunzione che $\sigma < 1$, $\rho < 1$ dunque necessario massimizzare l'espressione tra parentesi quadrate; e' inoltre chiaro che $\xi_3 > 0$. Si supponga di costringere l'impresa a utilizzare o D_u o D_k, ma non entrambi. Si noti allora che per ognuno dei fattori scelti, D_j sara' elevanto a ξ_2. In questo caso l'impresa evitera' soluzioni d'angolo (cioe' $D_s = 0$ or $D_s = B$) se e solo se $\xi_2 < 1$. In caso contrario specializzarsi interamente in una delle due tecnologie. Si supponga di essere nel caso in cui $\xi_2 < 1$ ma si rilassi inoltre uno dei due vincoli che D_u o D_k sia zero. Dentro le parentesi si noti che la massimizzazione implica una soluzione non d'angolo tra D_u, D_k se e solo se $\xi_1 < 1$. Dunque se la massimizzazione vincolata (o $D_u = 0$ o $D_k = 0$) implica una soluzione non d'angolo tra D_s e D_u o D_k, allora possiamo fare meglio nel problama senza vincoli usando sia D_u sia D_k se $\xi_1 < 1$. Dunque, sotto queste condizioni, e' possibile risolvere per un equilibrio interno e unico.

Abstract

Questo saggio pone alcune domande di tipo normativo nell'ambito della letteratura dell'economia dell'immigrazione. In particolare ci si chiede se l'immigrazione possa essere utilizzata come uno strumento adatto a ridurre le distorsioni della tassazione sul lavoro. L'ambito di analisi e' quello di un pianificatore che dispone di strumenti di tassazione limitati (tasse lineari sul lavoro) da utilizzarsi per finanziare un dato ammontare di spesa pubblica ("Ramsey Planner"). Il risultato pricinpale del lavoro e' che l'immigrazione puo' essere utilizzata come tale quando i fattori della produzione (i.e. diverse tipologie di lavoro) tendono ad essere complementari piuttosto che sostituti.

Immigrazione e Tassazione Ottima

Filippo Rebessi

Dipartimento di Economia,

Universita' degli Studi di Parma,

Parma, Italia

Novembre 2012

1 Introduzione

La letteratura sull'economia dell'immigrazione esistente si concentra principalmente sulla quantificazione degli effetti delle politiche migratorie sulle condizioni lavorative dei lavoratori locali. Borjas (2003), ad esempio, argomenta che l'influsso di immigrati non qualificati negli Stati Uniti avvenuto in seguito al "Immigration and Nationality Act" del 1965 abbia notevolemente danneggiato le possibilita' di impiego dei lavoratori locali. Ottaviano e Peri (2006) contrastano questa tesi e calcolano che il costo maggiore di questo influsso sia stato sostenuto dai lavoratori precedentemente immigrati negli Stati Uniti.

Questo saggio si propone un obiettivo differente e complementare alla letteratura empirica. Il punto di partenza e' definire un framework teorico che permetta di rispondere a domande legate a quel che un pianificatore benevolo *dovrebbe* fare, in termini di politiche dell'immigrazione. L'idea e' di usare gli strumenti classici dell'economia del benessere per caratterizzare la policy ottimale. Definire il quadro teorico di riferimento, tuttavia, e' un problema tutt'altro che banale.

I teoremi dell'economia del benessere, e piu' in generale il concetto di efficienza in termini *Paretiani*, sono definiti infatti per popolazioni date. L'introduzione di immigrati in un modello economico rende la comparazione di un'allocazione in termini di benessere degli agenti non ovvia, in quanto ora la popolazione dell'economia e' ora aumentata ed e' composta in parte da nuovi agenti. Come comparare una qualunque nuova allocazione *post immigrazione* con l'allocazione *pre immigrazione*? Deve essere presa in considerazione, ad esempio, l'utilita' di tutti gli agenti che potenzialmente potrebbero popolare l'economia se autorizzati a migrare? Un'analisi comprensiva richiederebbe di ridefinire il concetto di efficienza paretiana per questo tipo di contesto economico, in cui la dimensione della popolazione dipende dalla policy adottata [si veda anche Jones et al. (2004) per una esposizione piu' dettagliata di un simile problema nell'ambito delle scelta di fertilita'].

Questo saggio parte da premesse meno ambiziose. Si parte infatti dall'analisi classica del problema di un pianificatore centrale che vuole massimizzare l'utilita' media dell'economia degli agenti esistenti, soggetto a un vincolo di risorse disponibili. Il problema e' arricchito dalla possibilita' per il pianificatore di aumentare la popolazione dei lavoratori tramite immigrazione. In altre parole, il pianificatore non ha nella sua funzione obiettivo il livello di soddisfazione dei potenziali agenti immigrati. La soluzione del problema permette di individuare le allocazioni Pareto ottimali per gli agenti esistenti (e non necessariamente per quelli immigrati o potenziali immigrati). Si mostra in primo luogo che, in assenza di eterogeneita' degli agenti che popolano l'economia, quando il pianificatore sia forzato a concedere agli agenti entranti un livello di consumo sufficientemente elevato, l'immigrazione ottima e' pari a zero.

Successivamente, il modello e' aumentato per considerare il caso di agenti eterogenei nelle rispettive dotazioni di lavoro; si considerano due tipi di agente, per semplicita', che si possono interpretare, possibilmente, come agenti qualificati e non qualificati. Entrambi contribuiscono, tramite una semplice tecnologia aggregata, alla produzione del bene di consumo dell'economia. In questo contesto si mostra come un influsso di immigrati possa contribuire ad aumentare il benessere degli agenti esistenti. Il lavoro evidenzia il ruolo chiave della complementarita' dei fattori produttivi per ottenere questo risultato.

Infine, il framework e' esteso per considerare il classico problema di un pianificatore "a' la' Ramsey": il governo deve finanziare un certo ammontare di spesa pubblica con un insieme limitato di strumenti di tassazione (in questo caso tasse lineari sul lavoro). Il pianificatore puo' anche ammettere una certa misura di immigrati nell'economia. L'assunzione tecnica e' di "full commitment" del pianificatore. Il framework e' nuovamente quello di agenti con dotazioni eterogenee di tipologie di lavoro. Il lavoro deriva le condizioni nel rispetto delle quali le distorsioni della tassazione sul lavoro possono essere ridotte tramite una semplice politica di immigrazione.

Il saggio e' organizzato come segue: nella prossima sezione, "Immigrazione e Agente Rappresentativo", viene introdotto il modello nella sua formulazione piu' basilare; il primo risultato teorico viene illustrato. La sezione seguente del paper, "Eterogeneita' e Immigrazione Ottima", il problema e' arricchito a due tipi di agente. La sezione "Problema di Ramsey e Immigrazione", che precede le conclusioni, specifica un concetto di equilibrio decentralizzato (equilibrio competitivo con distorsioni da tassazione) e sviluppa il problema di un pianificatore benevolo che tenga in considerazione delle reazioni di equilibrio degli agenti.

2 Immigrazione e Agente Rappresentativo

Si supponga che l'economia sia popolata da un continuo di agenti identici distribuiti sull'intervallo $[0, 1]$. Per semplicita' di analisi si considera un orizzonte uniperiodale. Al fine di trovare le allocazioni Pareto ottimali, e' possibile risolvere il seguente problema:

$$\max_{c,n,\phi} u(c) - v(n)$$

$$s.t. \quad c + \phi\bar{c} \leq [(1 + \phi)n]^{\alpha}$$

$$\phi \geq 0, \qquad \phi \leq \bar{\phi}, \qquad n \in [0, 1]$$

Si noti in primis che un'allocazione per il consumatore (c, n), ovvero consumo e ore lavorate entrano nella funzione di utilita' dell'agente. Si assume che u sia una funzione concava, continua e crecente, mentre v sia una funzione convessa, continua e crescente. α appartiente all'intervallo $(0, 1)$; in altre parole, la funzione di produzione e' strettamente concava ed esibisce dunque rendimenti marginali decrescenti. Ignoriamo per un momento la terza scelta del pianificatore, ϕ. La soluzione del problema e' semplicemente data dalle due equazioni seguenti:

$$u'(c)\alpha = v'(n)n^{1-\alpha}$$

$$c = n^{\alpha}$$

Se le ore lavorate non entrassero negativamente nell'obiettivo del pianificatore, la soluzione sarebbe semplicemente di impiegare tutte le ore disponibili per massimizzare la produzione del bene di consumo. La considerazione del trade off tra consumo e ore lavorate spinge il pianificatore ad orientarsi per una soluzione interna, in cui il consumo e' ridotto ma anche le ore lavorate sono ridotte. Quel che ci si chiede e' se un influsso di immigrati, contestualizzato a questo semplice modello, possa rilassare questo trade off.

Si consideri allora la scelta di ϕ, che consiste di fatto in un aumento della misura di lavoratori impiegati dal pianificatore. I lavoratori sono considerati identici a quelli esistenti; tuttavia, questi non compaiono nella funzione obiettivo del pianificatore, ma solo nel vincolo di risorse disponibili. Cio' esemplifica quanto anticipato nell'introduzione: effetti sul benessere dei potenziali entranti non sono considerati direttamente. Si assume in pratica che vi sia un certo ammontare di immigrati $\bar{\phi}$ pronti ad entrare nell'economia e che il pianificatore debba decidere quanti di essi sia ottimale ammettere. Per assunzione, questi offriranno la stessa quantita' di ore lavorate dei lavoratori gia' esistenti, come puo' essere apprezzato osservando l'espressione $[(1 + \phi)n]^{\alpha}$. Si noti infine che vi e' un costo, in termini di

risorse disponibili, legato all'ammissione di un ammontare positivo di immigrati: $\bar{c} \geq 0$.
Al fine di esplorare le proprieta' di questo modello, si parta dal caso triviale in cui $\bar{c} = 0$. Di fatto, il pianificatore ammette immigrati che non consumano alcuna risorsa creata nell'economia e allo stesso tempo contribuiscono a crearne offrendo lavoro in quantita' n. Derivando rispetto alle variabili di scelta si ottengono la seguenti due espressioni:

$$u'(c)\alpha(1+\phi)^{\alpha-1}n^{\alpha} = -\theta_1$$

$$u'(c)\alpha(1+\phi)^{\alpha-1}n^{\alpha} = \theta_2$$

dove θ_1 denota il moltiplicatore di Lagrange relativo al vincolo $\phi \geq 0$ mentre θ_2 si riferisce a $\phi \leq \bar{\phi}$. Si supponga che il primo vincolo sia stringente; in quel caso $\theta_1 > 0$ e dunque il lato destro dell'equazione e' negativo; tuttavia il lato sinistro non puo' essere negativo, dunque $\phi > 0$. Analogamente, se θ_2 non fosse positivo, allora ϕ dovrebbbe tendere all'infinito, ma anche questo caso e' impossibile, essendo ϕ limitato superiormente. Di conseguenza $\phi = \bar{\phi}$.
Si supponga invece ora che $\bar{c} > 0$; in altre parole, il pianificatore deve offrire un certo ammontare positivo di consumo agli immigrati entranti. Si pu interpretare questa assunzione come un vincolo di partecipazione implicito: un agente non accetta il contratto offerto dal pianificatore se non riceve almeno il valore di una data opzione esterna.
Dalla condizione del prim'ordine per ϕ si ottiene ora

$$\alpha(1+\phi)^{\alpha-1}n^{\alpha} = -\frac{\theta_1}{u'(c)} + \bar{c}$$

$$\alpha(1+\phi)^{\alpha-1}n^{\alpha} = \frac{\theta_2}{u'(c)} + \bar{c}$$

E' dunque ora chiaro il trade off di ammettere immigrati: al lato sinistro dell'equazione abbiamo in relativo beneficio marginale, in termini di maggiori ore lavorate; sul lato destro abbiamo invece il costo marginale, che e' il minimo consumo da assegnare agli agenti immigrati. In una soluzione interna, $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Abbiamo gia' visto che per $\bar{c} \to 0$, il pianificatore cerchera' di ammettere il massimo numero di immigrati disponibile. Si supponga ora che agli immigrati debba essere corrisposto lo stesso ammontare di consumo che e' dato agli agenti locali. Questo e' un benchmark interessante perche', in un ottica di implementazione tramite trasferimenti di questa allocazione, questo corrisponde a una situazione in cui un autorita' governativa non possa discriminare in base al paese d'origine dell'agente economico. Dato che gli immigrati in questo modello offrono una quantita' di lavoro identica a quella dei lavoratori locali, ogni $\hat{c} < c$ e' di fatto una politica di tipo confiscatorio nei confronti degli immigrati.

Dunque, si supponga $\hat{c} = c$; il vincolo di risorse puo' essere riscritto come segue:

$$c(1+\phi) \leq [(1+\phi)n]^{\alpha}$$

che puo' essere riarrangiato come

$$c \leq (1+\phi)^{\alpha-1} n^{\alpha}$$

Il problema del pianificatore diventa dunque il seguente:

$$\max_{n,\phi} u\left[(1+\phi)^{\alpha-1} n^{\alpha}\right] - v(n)$$

soggetto ai medesimi vincoli (escludendo quello di risorse disponibili). Dalle condizioni del prim'ordine per ϕ si ottengono immediatamente la seguenti condizioni:

$$(\alpha-1)u'(c)n^{\alpha}(1+\alpha)^{\alpha-2} = -\theta_1$$

$$(\alpha-1)u'(c)n^{\alpha}(1+\alpha)^{\alpha-2} = \theta_2$$

Si noti che il lato sinistro dell'equazione e' strettamente negativo, essendo $\alpha \in (0,1)$. Di conseguenza la seconda condizione non sara' mai verificata, ne' tantomeno sara' possibile avere una soluzione interna. E' necessario dunque avere $\phi = 0$. Quando il pianificatore non puo' attuare politiche discriminatorie, non c'e' motivazione economica per ammettere una quantita' positiva di immigrati. La ragione risiede nei rendimenti marginali decrescenti dei fattori della produzione: aggiungere immigrati comporta un beneficio marginale decrescente ad un costo marginale costante. Questo evidenzia uno degli elementi tipici evidenziati nella letteratura empirica dell'economia dell'immigrazione: se l'immigrazione consiste semplicemente in un aumento della disponibilita' di un fattore, il rendimento di questo fattore dovra' scendere, in equilibrio. I possessori locali di questo fattore subiranno quindi un decremento del proprio benessere, conseguentemente.

Un aspetto non considerato in quest'ottica e' quello in cui gli immigrati non contribuiscano ad un aumento di questo genere. Il tipico esempio e' il fattore "terra": gli immigrati non contribuiscono ad aumentarne la dotazione, entrando in una economia. Tuttavia, contribuiscono ad aumentarne la domanda, creando un effetto positivo, nell'equilibrio decentralizzato competitivo, sul prezzo di questo fattore. I possessori di questo fattore avranno quindi un effetto reddito positivo, in questo caso. L'analisi presente, tuttavia, esula da questo genere di fattori in offerta fissa e si concentra sul fattore lavoro, in linea con la letteratura esistente.

3 Eterogeneita' e Immigrazione Ottima

Si considera ora un modello piu' complesso, in cui due fattori produttivi sono impiegati, posseduti in modo esclusivo e in quantita' limitata da due tipi di agenti. Questi fattori possono essere pensati come due tipi di lavoro: lavoro qualificato e non qualificato, che entrano come imperfetti sostituti in una funzione di produzione a rendimenti decrescenti. Formalmente, il problema del pianificatore e' il seguente:

$$\max_{c_1,c_2,n_1,n_2} \alpha_1 \left[u(c_1) - v(n_1)\right] + \alpha_2 \left[u(c_2) - v(n_2)\right]$$

subject to

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \leq \left[(\alpha_1 n_1)^\sigma + (\alpha_2 n_2)^\sigma\right]^{\frac{\alpha}{\sigma}}$$

$\alpha_i, i \in \{1, 2\}$ indica la misura di agenti di tipo 1 e 2 presenti nell'economia. La funzione di produzione e' un aggregatore dei due tipi di lavoro offerto dagli agenti. Prima di introdurre la scelta relativa all'immigrazione, si notino le seguenti proprieta' delle allocazioni ottimali. Dalle condizioni del prim'ordine:

$$u'(c_1) = u'(c_2)$$

$$\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{1-\sigma}$$

Dalla prima condizione emerge come $c_1 = c_2$; eventuali differenze in benessere tra i 2 agenti riguardano dunque l'allocazione delle ore lavorate. Si supponga $\alpha_2 = \alpha_1$: in questo caso, gli agenti sono assolutamente identici. Si veda invece, a fini illustrativi, il caso $\alpha_2 > \alpha_1$. Chiaramente

$$\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} > 1$$

Si supponga, per assurdo, $n_1 \leq n_2$. Essendo $v(n)$ una funzione convessa, $v'(n_2) > v'(n_1)$ e dunque $\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)} \leq 1$; essendo inoltre vero per ipotesi che $\frac{n_1}{n_2} \leq 1$, ne consegue che $\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} \leq 1$: una contraddizione. Dunque e' necessariamente vero che $n_1 > n_2$. Si noti che il risultato non dipende da σ, che appartiene all'intervallo $(-\infty, 1]$. Di conseguenza, il gruppo la cui dotazione di lavoro complessiva e' meno abbondante nell'economia deve lavorare maggiormente in questo modello, godendo quindi di un livello di benessere inferiore.

La domanda da porsi e' dunque se l'introduzione di una data quantita' di immigrati possa aiutare a compensare questa differenza e, piu' in generale, se ci sia spazio per miglioramenti in senso paretiano dal punto di vista dei lavoratori locali in questa economia. Il problema del pianificatore e' il seguente:

$$\max_{c_1,c_2,n_1,n_2,\beta} \alpha_1 \left[u(c_1) - v(n_1)\right] + \alpha_2 \left[u(c_2) - v(n_2)\right]$$

subject to

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \sum_i \beta_i \hat{c} \leq \{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha}{\sigma}}\ ;\ \ i \in (1,2)$$

$$\beta_i \geq 0,\ \ \beta_i \leq \bar{\beta}_i,\ \ i \in (1,2)$$

La soluzione del problema e' data dalle seguenti 5 equazioni, insieme al vincolo di risorse disponibili:

$$u'(c_2) = u'(c_1)$$

$$\alpha_1 v'(n_1) = \alpha u'(c_1)\{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha-\sigma}{\sigma}} (\beta_1 + \alpha_1)^\sigma n_1^{\sigma-1}$$

$$\alpha_2 v'(n_2) = \alpha u'(c_2)\{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha-\sigma}{\sigma}} (\beta_2 + \alpha_2)^\sigma n_1^{\sigma-1}$$

$$u(c_i) - v(n_i) \geq u'(c_i)c_i - v'(n_i)n_i,\ \ i \in (1,2)$$

Si noti che, combinando l'equazione (2) e (3) si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} = \left(\frac{\beta_1 + \alpha_1}{\beta_2 + \alpha_2}\right)^\sigma \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Quando $\beta_1 = \beta_2 = 0$, siamo semplicemente nel caso precedente, in cui i lavoratori la cui misura nell'economia sia inferiore offrono piu' lavoro e di conseguenza hanno un livello di benessere inferiore. Si noti tuttavia come questa differenza possa essere mitigata tramite un influsso di immigrati. Potenzialmente, un pianificatore senza restrizioni potrebbe scegliere $\beta_1 = \alpha_2^{\frac{-1}{\sigma}} - \alpha_1$ e $\beta_2 = \alpha_1^{\frac{-1}{\sigma}} - \alpha_2$, in modo da ottenere perfetta uguaglianza nelle ore lavorate dei due gruppi. Cio' permette in primo luogo di apprezzare la natura di un cambiamento nella dimensione della popolazione come politica redistributiva: il pianificatore ottiene infatti in questo modo un'allocazione simmetrica. Si supponga ora piu' realisticamente che solo un gruppo di immigrati sia disponibile a entrare nell'economia:

$$\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} = \left(\frac{\beta_1 + \alpha_1}{\alpha_1^{1/\sigma}}\right)^\sigma \alpha_2^{1-\sigma}$$

oppure

$$\frac{v'(n_1)}{v'(n_2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1-\sigma} = \left(\frac{\beta_2 + \alpha_2}{\alpha_2^{1/\sigma}}\right)^{-\sigma} \alpha_1^{\sigma-1}$$

Il pianificatore ottiene l'effetto desiderato aumentando la misura di lavoratori di tipo 1, che sono il fattore "scarso" nell'economia (si sta sempre assumendo $\alpha_2 > \alpha_1$) , solo se $\sigma < 0$, vale a dire solo se il livello di complementarita' dei due fattori nella funzione di produzione e' relativamente elevato. Quando invece i due fattori tendono ad essere sostituti, cioe' per $\sigma \in (0,1)$, il pianificatore otterra' un'allocazione piu' egualitaria ammettendo immigrati di tipo 2.

Analizzati gli effetti redistributivi, e' ora necessario stabilire se un influsso di immigrati possa risultare effettivamente la scelta ottimale del pianificatore.

Il caso triviale corrisponde a $\hat{c} = 0$. La condizione di ottimalita' per β_1 (ma lo stesso argomento puo' estendersi a β_2) e' la seguente:

$$\alpha \left\{ [(\beta_1 + \alpha_1) n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2) n_2]^\sigma \right\}^{\frac{\alpha - \sigma}{\sigma}} [\alpha_1 + \beta_1]^{\sigma - 1} n_1^\sigma = \frac{\lambda}{u'(c_1)} + \hat{c}$$

dove λ e' il moltiplicatore di Lagrange sul vincolo $\beta_1 \leq \bar{\beta}_1$. Dato che il lato sinistro dell'equazione e' una quantita' positiva e che $\hat{c} = 0$, il vincolo e' necessariamente stringente e il moltiplicatore di conseguenza e' negativo.

Al crescere di $\hat{c}$, il vincolo viene progressivamente rilassato e la soluzione diventa interna. Chiaramente, quando $\hat{c}$ e' sufficientemente grande, ad essere stringente sara' il vincolo $\beta_1 \geq 0$, che entrera' negativamente al lato destro dell'equazione. Questo argomento, assieme alla continuita' del lato sinistro dell'equazione, prova dunque l'esistenza di un $\hat{\hat{c}} > 0$ tale che la soluzione per β_1 sia interna, ovvero $\beta_1 \in (0, \bar{\beta}_1)$.

II prossimo passo e' di mostrare se esista una configurazione parametrica tale che la politica di immigrazione del pianificatore sia non discriminatoria, ovvero $\hat{c} = c$ e $\beta_1 \in (0, \bar{\beta}_1)$, e possa comunque dare luogo a miglioramenti paretiani per gli agenti esistenti. Nel caso dell'agente rappresentativo, si e' mostrato come cio' non fosse possibile. Il caso di agenti eterogenei nella loro dotazione di lavoro lascia spazio a questa possibilita', visti i potenziali benefici appena illustrati.

Si parta dal caso $\sigma > 0$. Si ricordi inoltre l'assunzione $\alpha_2 > \alpha_1$. In questo caso, al fine di conseguire una allocazione di ore lavorate dal tipo 1 al tipo 2 tramite immigrazione, e' necessario avere $\beta_2 > 0$, come e' stato mostrato precedentemente. Si noti tuttavia che dalle condizioni del prim'ordine per il consumo si ottiene

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2} < 1$$

Conseguentemente, $c_2 < c_1$. Dato il rendimento marginale decrescente dei nuovi lavoratori introdotti, questo non puo' altro che significare che il nuovo livello di consumo per l'agente di tipo 2 e' inferiore a quello conseguito nel caso in cui $\beta_2 = 0$. Segue dunque che questa politica non puo' rappresentare un miglioramento paretiano per l'agente di tipo 2, che dovra' in questo caso incrementare anche le ore lavorate.

Si consideri ora il caso $\sigma < 0$. In questo caso e' necessario avere $\beta_1 > 0$, da cui consegue

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1} > 1 \rightarrow c_2 > c_1$$

Il consumatore di tipo 1 otterra' un'allocazione in termini di consumo inferiore alla situazione in cui $\beta_1 = 0$, applicando lo stesso argomento prcedente. Tuttavia, come e' stato dimostrato sopra, l'allocazione in termini di ore lavorate sara' ora piu' generosa, lasciando spazio a possibili miglioramenti paretiani per entrambi gli agenti.

In particolare, quando α_1 e' particolarmente piccolo rispetto ad α_2, grazie alla convessita' di v, il beneficio in termini di una riduzione di ore lavorate piu' che compensa la perdita in termini di benessere dovuta alla riduione in consumo. Come preannunciato, la complementarita' tra i due fattori gioca un ruolo importante nel determinare questo risultato.

4 Problema di Ramsey e Immigrazione

Questa sezione si ispira al contributo originale di Frank Ramsey (1927), che considerava un problema di tassazione ottimale in una economia con un agente rappresentativo in cui solo tasse distorsive sono disponibili per finanziare un dato ammontare di spesa pubblica. L'approccio qui adottato e' quello che Chari e Kehoe (1994) definiscono come "approccio primale"; si caratterizza l'insieme allocazioni che possono essere implementate come un equilibrio competitivo distorto dalla tassazione usando un problema di un pianificatore centrale soggetto a due vincoli: implementabilita' e risorse disponibili. Il pianificatore avra', tra gli strumenti disponibili, anche la possibilita' di ammettere immigrati.

L'economia conserva la struttura della sezione 3 di questo saggio; sono cioe' presenti due tipi di agenti che offrono lavoro qualificato e non qualificato, i quali sono combinati come sostituti imperfetti in una funzione di produzione a rendimenti decrescenti. Le uniche tasse disponibili sono tasse lineari sul reddito da lavoro.

Il saggio prosegue come segue: si definisce ora il problema dei consumatori e dell'impresa nell'economia decentralizzata. Viene poi definito il concetto di equilibrio formalmente e se ne offre una caratterizzazione.

Trova poi spazio il problema del pianificatore centrale, dopo aver derivato il rispettivo vincolo di implementabilita'. La soluzione di questo relativamente semplice problema viene caratterizzata tramite condizioni del prim'ordine, dalle quali e' possibile definire una quantita' chiave: il cosiddetto "labor wedge", che riassume le distorsioni della tassazione sul lavoro. Si mostra come questo sia una funzione indiretta del livello di immigrazione e sotto quali condizioni un aumento dell'immigrazione possa contribuire a diminuire questa distorsione.

4.1 Equilibrio Competitivo

I consumatori massimizzano la propria funzione di utilita' soggetti al vincolo di bilancio; il bene di consumo e' il numerario. L'impresa e i consumatori assumono come data la policy del governo e la dimensione della popolazione

$$\max_{\{c_i,n_i\}} u(c_i) - v(n_i) \quad i \in (1,2)$$

$$s.t. \;\; c_i \leq w_i n_i (1-\tau)$$

L'impresa solve

$$\max_{\{n_1,n_2\}} \{[(\beta_1+\alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2+\alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha}{\sigma}} - \sum_i (\alpha_i+\beta_i) w_i n_i$$

Un equilibrio competitivo distorto dalla tassazione, e' il seguente oggetto:

- Una policy del governo $g = \{\tau, (\beta_i)_{i\in 1,2}\}$
- Un'allocazione per i consumatori $c = \{c_i, n_i^c\}_{i\in(1,2)}$
- Un'allocazione per l'impresa $f = \{n_i^f\}_{i\in(1,2)}$
- Un sistema di prezzi $w = \{w_i\}_{i\in(1,2)}$

tali che, data la spesa pubblica $\bar{g}$

- c solve il problema dei consmatori e f solve quello della impresa
- il budget del governo e' bilanciato, ovvero $\tau \sum_i w_i(\alpha_i+\beta_i)n_i = \bar{g}$
- $\sum_i c_i(\alpha_i+\beta_i) = \{[(\beta_1+\alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2+\alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha}{\sigma}}$, $n_i^c = n_i^f$, $\forall i$

L'equilibrio puo' essere caratterizzato dal seguente sistema di equazioni, derivato dalle condizioni del prim'ordine, che sono necessarie e sufficienti:

$$v'(n_i) = u'(c_i)\tau w_i \quad i \in (1,2)$$

$$w_i = \alpha \{[(\beta_1+\alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2+\alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha-\sigma}{\sigma}} (\beta_i+\alpha_i)^\sigma n_i^{\sigma-1} \quad i \in (1,2)$$

$$c_i \leq w_i n_i (1-\tau) \quad i \in (1,2)$$

Usando l'equazione (1) e (3) si ottengono i vincoli di implementabilita' del pianificatore:

$$u'(c_i)c_i - v'(n_i)n_i \leq 0 \quad i \in (1,2)$$

4.2 Approccio Primale

Il pianificatore a' la Ramsey solve il seguente problema:

$$\max_{\{c_1,c_2,n_1,n_2\}} \alpha_1 \left[u(c_1) - v(n_1)\right] + \alpha_2 \left[u(c_2) - v(n_2)\right]$$

$$\textit{subject to } u'(c_i)c_i - v'(n_i)n_i \leq 0 \quad i \in (1,2)$$

$$\sum_i c_i(\alpha_i + \beta_i) = \{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha}{\sigma}}$$

$$\beta_i \geq 0, \quad \beta_i < \bar{\beta}_i$$

Dalle condizioni del prim'ordine per n_i si deriva la seguente condizione di ottimalita':

$$\alpha_i v'(n_i) = \theta_i \left[v''(n_i)n_i + v'(n_i)\right] + \lambda \{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha-\sigma}{\sigma}} n_i^{\sigma-1}(\beta_i + \alpha_i)^\sigma$$

dove θ_i e' il moltiplicatore relativo al rispettivo vincolo di implementabilita', mentre λ e' il moltiplicatore relativo al vincolo di risorse disponibili. Sostituendo per $\lambda = u'(c_i)$, si puo' apprezzare come la quantita'

$$\theta_i \left[v''(n_i)n_i + v'(n_i)\right]$$

rappresenti le distorsioni dovute alla tassazione sul lavoro. Questa si frappone infatti esattamente tra il costo marginale di un'ora lavorata, al lato sinistro dell'equazione, e il beneficio marginale di questa stessa ora, rappresentato dall'espressione $\lambda \{[(\beta_1 + \alpha_1)n_1]^\sigma + [(\beta_2 + \alpha_2)n_2]^\sigma\}^{\frac{\alpha-\sigma}{\sigma}} n_i^{\sigma-1}(\beta_i + \alpha_i)^\sigma$ (in unita' di utils marginali). Si definisca dunque questa quantita' come "labor wedge".

E' ora necessaria un'ulteriore assunzione: $v'''(n_i) > 0$. Si noti come, a questo punto, il "labor wedge" sia una funzione monotona crescente di n_i. Cio' e' dovuto alla convessita' della funzione v e alla convessita' della sua derivata prima.

E' ora utile considerare il problema del pianificatore ignorando provvisoriamente i vincoli di implementabilita' e approcciare il problema semplicemente considerando i vincoli relativi a β_i e alle risorse disponbili. Utilizzando i risultati derivati in sezione 3, e' opportuno richiamare la seguente proprieta':

Proposition 4.1. *Se $\sigma < 0$, allora n_i e' una funzione decrescente di β_i*

E' dunque ora opportuno riesprimere il labor wedge come funzione di β_i:

$$\theta_i \left[v''(n_i(\beta_i))n_i(\beta_i) + v'(n_i(\beta_i))\right]$$

Chiaramente

$$\frac{d}{d\beta_i}\theta_i\left[v''(n_i(\beta_i))n_i(\beta_i)+v'(n_i(\beta_i))\right]<0$$

Ovvero il labor wedge e' decrescente nel livello di immigrati di uno specifico tipo. Si noti ancora che per ottenere questo risultato e' necessario che i due fattori produttivi siano complementi; in caso contrario (i.e. $\sigma \in (0,1)$), l'immigrazione ottiene risultati diametralmente opposti.

5 Conclusione

Questo saggio propone un modello per analizzare domande di tipo normativo nell'ambito dell'economia dell'immigrazione. Uno dei principali risultati e' che una politica generosa in termini di ingressi necessita, per avere una chance di produrre miglioramenti paretiani, complementarita' negli input della funzione di produzione, che in questo contesto sono lavoro qualificato e non qualificato. Un secondo importante risultato, derivato risolvendo il problema di un pianificatore a' la Ramsey, e' che, sotto alcune assunzioni tecniche sulla funzione di utilita' (i.e. $v'''(n) > 0$), l'immigrazione ha modo di contribuire a diminuire le distorsioni dovute alla tassazione. Il lavoro puo' essere esteso all'impiego di funzioni di produzione piu' complesse, che catturino le reazioni ottimali dell'impresa alle mutate dotazioni di fattori seguenti un influsso di immigrati. Il lavoro non indirizza pienamente il problema di come valutare l'utilita' e le preferenze di immigrati entranti e potenziali immigrati; e' auspicabile che un'analisi analoga a quella di Jones, Golosov e Tertlit (2004) venga effettuata per dare una migliore prospettiva su quale sia la corretta definizione di efficienza in questo contesto in cui la popolazione cresce endogenamente, per mezzo delle politiche di un governo.

6 Bibliografia

Borjas, G., 2003. The Labor Demand Curve Is Downward Sloping: Reexamining the Impact of Immigration on the Labor Market. The Quarterly Journal of Economics 118, 1335-1374

Peri, G., Ottaviano, G.,M., 2006. Rethinking the e?ects of immigration on wages. NBER WP

Jones, L., Golosov, M., Tertilt, M., 2004. Efficiency with endogenous population growth. Econometrica 75, 1039-1071

Chari, VV., Kehoe, P. 1993. Optimal fiscal and monetary policy. Minneapolis FED WP